

2026年度 九州大学 前期 数学 理系

〔1〕

(1) 円 C_1, C_2 の中心をそれぞれ O_1, O_2 とする.

平面 T_1, T_2 は $\vec{OP}$ に垂直であるから, $\vec{OO_1}, \vec{OO_2}$ は $\vec{OP}$ と平行である.

球 S の半径は 3, C_1, C_2 の半径は 1 であるから,

$$|\vec{OO_1}| = |\vec{OO_2}| = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$$

また, $|\vec{OP}| = \sqrt{1+3} = 2$ より, $\vec{OO_1}, \vec{OO_2}$ は

$$\pm\sqrt{2}\vec{OP} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{6}), (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{6})$$

に一致する. O_1 の z 座標が正, O_2 の z 座標が負であるから,

$$C_1 \text{ の中心は } (\sqrt{2}, 0, \sqrt{6}), C_2 \text{ の中心は } (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{6}) \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) 円柱の側面上の任意の点を $Q(x, y, z)$ とおく.

点 Q は, 線分 O_1O_2 上のある点 $R(t, 0, \sqrt{3}t)$ ($-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$) を通る $\vec{OP}$ に垂直な平面上にある. この平面の方程式は

$$x - t + \sqrt{3}(z - \sqrt{3}t) = 0 \quad \therefore x + \sqrt{3}z - 4t = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$QR = 1 \text{ より } (x - t)^2 + y^2 + (z - \sqrt{3}t)^2 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

① より $t = \frac{x + \sqrt{3}z}{4}$ これを ② へ代入して

$$\left(x - \frac{x + \sqrt{3}z}{4}\right)^2 + y^2 + \left(z - \frac{\sqrt{3}x + 3z}{4}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \frac{(3x - \sqrt{3}z)^2}{16} + y^2 + \frac{(-\sqrt{3}x + z)^2}{16} = 1$$

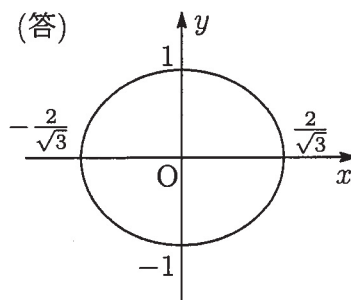
$$z = 0 \text{ と連立して } \frac{9x^2}{16} + y^2 + \frac{3x^2}{16} = 1 \quad \therefore \frac{3x^2}{4} + y^2 = 1$$

また, C_1 上の点の z 座標の最小値は $\sqrt{6} - \frac{1}{2} > 0$, C_2 上の点の z 座標の最大値は $-\sqrt{6} + \frac{1}{2} < 0$ であるから, 平面 $z = 0$ は C_1, C_2 と共有点をもたない.

よって, 円柱の側面の平面 $z = 0$ による切り口の曲線は

$$\text{楕円 } \frac{3x^2}{4} + y^2 = 1 \text{ である.} \quad \dots\dots (\text{答})$$

楕円は右のようになる.



[2]

(1) 点 z は線分 $z = t + ti$ (t は実数) 上を動く. t の範囲は $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \leq t \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ であり, この範囲において $t > 0$ であるため $z \neq 0$ である. そこで, $z^2 - wz + 1 = 0$ の両辺を z で割って変形すると,

$$w = z + \frac{1}{z} = t(1+i) + \frac{1}{t(1+i)} = t(1+i) + \frac{1-i}{2t} = \left(t + \frac{1}{2t}\right) + i\left(t - \frac{1}{2t}\right)$$

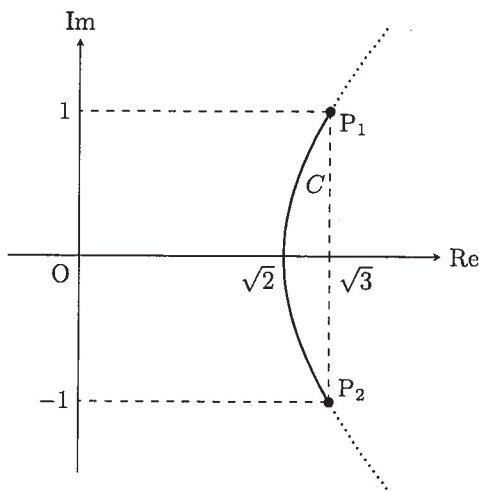
となる. $w = x + yi$ (x, y は実数) とおくと,

$$x = t + \frac{1}{2t}, \quad y = t - \frac{1}{2t}$$

t を「消去」するために辺々を 2 乗して差をとると,

$$x^2 - y^2 = \left(t + \frac{1}{2t}\right)^2 - \left(t - \frac{1}{2t}\right)^2 = 2$$

となる. 次に, t が $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \leq t \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ を動くときの点 (x, y) の範囲を調べる. $\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \beta = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ とおくと, $\alpha\beta = \frac{1}{2}$ より $\frac{1}{2\alpha} = \beta, \frac{1}{2\beta} = \alpha$ が成り立つ. $t > 0$ において $y = t - \frac{1}{2t}$ は単調増加であるから, y は $\alpha \leq t \leq \beta$ において単調に増加する. $t = \alpha$ のとき, $x = \alpha + \beta = \sqrt{3}$, $y = \alpha - \beta = -1$ であり, $t = \beta$ のとき, $x = \beta + \alpha = \sqrt{3}$, $y = \beta - \alpha = 1$ である. これと $x = t + \frac{1}{2t} > 0$ をあわせて, 求める軌跡 C は, 双曲線 $x^2 - y^2 = 2$ の $x > 0$ かつ $-1 \leq y \leq 1$ の部分である. これを複素数平面上に図示すると, 以下の実線部分となる.



…(答)

[別解]

$w = x + yi$ (x, y は実数) とおく. 求める軌跡 C は, 連立方程式

$$\begin{cases} x = t + \frac{1}{2t} \\ y = t - \frac{1}{2t} \end{cases}$$

を満たす実数 t が, 閉区間 $\left[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$ に存在するような点 (x, y) の集合である. 上の連立方程式において, 辺々の和と差をとると

$$x + y = 2t, \quad x - y = \frac{1}{t}$$

となる。したがって、これらを同時に満たす実数 t が上記の閉区間に存在する条件は、 $t = \frac{x+y}{2}$ であることから、

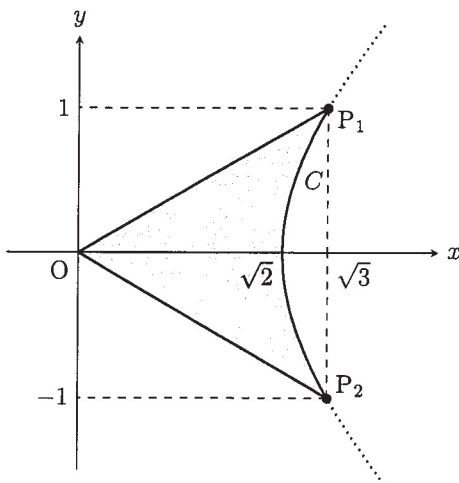
$$x - y = \frac{2}{x + y} \quad \text{かつ} \quad \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \leq \frac{x + y}{2} \leq \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

が成り立つことである。第1式から $(x + y)(x - y) = 2$ すなわち $x^2 - y^2 = 2$ を得る。また、第2式は辺々を2倍して整理すると

$$\sqrt{3} - 1 \leq x + y \leq \sqrt{3} + 1$$

となり、これは xy 平面において傾き -1 の2直線 $x + y = \sqrt{3} - 1$ と $x + y = \sqrt{3} + 1$ で挟まれた境界を含む帯状の領域を表す。したがって、軌跡 C は双曲線 $x^2 - y^2 = 2$ のうち、この帯状の領域に含まれる部分となる。ここで、 $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, \beta = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ とおくと、 $\alpha\beta = \frac{1}{2}$ である。境界線 $x + y = 2\beta = \sqrt{3} + 1$ と双曲線の交点については、 $(x + y)(x - y) = 2$ より $x - y = \frac{1}{\beta} = 2\alpha = \sqrt{3} - 1$ となるから、連立して解くと $(x, y) = (\sqrt{3}, 1)$ を得る。同様に、境界線 $x + y = 2\alpha = \sqrt{3} - 1$ と双曲線の交点については、 $x - y = \frac{1}{\alpha} = 2\beta = \sqrt{3} + 1$ となるから、 $(x, y) = (\sqrt{3}, -1)$ を得る。以上より、軌跡 C は双曲線 $x^2 - y^2 = 2$ の点 $(\sqrt{3}, -1)$ から点 $(\sqrt{3}, 1)$ までの部分となる。

(2) 以下、複素数平面上の点 $x + yi$ (x, y は実数) を xy 平面上の点 (x, y) と同一視して考える。(1) の結果より、 $P_1(\sqrt{3}, 1), P_2(\sqrt{3}, -1)$ である。線分 OP_1 を含む直線の方程式は $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ すなわち $x = \sqrt{3}y$ である。線分 OP_2 を含む直線の方程式は $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ すなわち $x = -\sqrt{3}y$ である。軌跡 C 、線分 OP_1 、線分 OP_2 で囲まれる領域は図の網掛け部分のようになり、 x 軸に関して対称である。



したがって、この領域を y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V は、 $y \geq 0$ の部分を回転させた体積の2倍となる。この立体を、 y 軸上の点 $(0, y)$ ($0 \leq y \leq 1$) を通り y 軸に垂直な平面で切った断面は、 $x^2 - y^2 = 2$ ($x \geq 0$) より $x = \sqrt{y^2 + 2}$ であるから外側の半径が $\sqrt{y^2 + 2}$ 、そして $x = \sqrt{3}y$ より内側の半径

が $\sqrt{3}y$ の円環領域となるから,

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 \left\{ \left(\sqrt{y^2 + 2} \right)^2 - \left(\sqrt{3}y \right)^2 \right\} dy \\ &= 2\pi \int_0^1 \{ (y^2 + 2) - 3y^2 \} dy \\ &= 2\pi \int_0^1 (2 - 2y^2) dy \\ &= 4\pi \left[y - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 \\ &= 4\pi \left(1 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{8\pi}{3}. \qquad \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

[3]

- (1) 3回硬貨を投げたとき、左から1, 2, 3番目の玉がすべて黒であるのは、3回とも裏が出るときであるから、求める確率 p_1 は、

$$p_1 = (1-r)^3 \quad \text{.....(答)}$$

- 4回硬貨を投げたとき、左から2, 3, 4番目の玉がすべて黒であるのは、4回とも裏が出るときであるから、求める確率 p_2 は、

$$p_2 = (1-r)^4 \quad \text{.....(答)}$$

- (2) $n+2$ 回硬貨を投げたとき、左から1, n , $n+1$, $n+2$ 番目の玉がすべて黒であるのは、1回目に裏が出て1番目の玉が黒で、2番目から改めて左から1番目と考えて $n-1$, n , $n+1$ 番目の玉がすべて黒であるときであるから、求める確率は、 $n \geq 2$ のとき、

$$(1-r)p_{n-1} \quad \text{.....(答)}$$

- (3) $n+2$ 回硬貨を投げたとき、左から n , $n+1$, $n+2$ 番目の玉がすべて黒であるのは、次の(i)(ii)のいずれかのときである。

- (i) 1回目に裏が出て1番目の玉が黒のとき、(2)の結果より確率は、

$$(1-r)p_{n-1}$$

- (ii) 1回目に表が出て1, 2番目の玉が白のとき、3番目から改めて左から1番目と考えて $n-2$, $n-1$, n 番目の玉がすべて黒であるから、確率は、

$$rp_{n-2}$$

- 以上(i)(ii)より p_n を p_{n-2} , p_{n-1} を用いて表すと、 $n \geq 3$ のとき、

$$p_n = (1-r)p_{n-1} + rp_{n-2} \quad \text{.....(答)}$$

- (4) (3)の結果より、 $n \geq 1$ のとき、

$$p_{n+2} = (1-r)p_{n+1} + rp_n$$

であり、

$$\begin{cases} p_{n+2} + rp_{n+1} = p_{n+1} + rp_n \\ p_{n+2} - p_{n+1} = -r(p_{n+1} - p_n) \end{cases}$$

である。数列 $\{p_{n+1} + rp_n\}$ は、初項が $p_2 + rp_1$ 、公比が1の等比数列であり、数列 $\{p_{n+1} - p_n\}$ は、初項が $p_2 - p_1$ 、公比が $-r$ の等比数列であるから、 $n \geq 1$ のとき、

$$\begin{cases} p_{n+1} + rp_n = (p_2 + rp_1) \cdot 1^{n-1} = (1-r)^4 + r(1-r)^3 = (1-r)^3 \\ p_{n+1} - p_n = (p_2 - p_1)(-r)^{n-1} = \{(1-r)^4 - (1-r)^3\}(-r)^{n-1} = (1-r)^3(-r)^n \end{cases}$$

である。辺々引くと、

$$(1+r)p_n = (1-r)^3 \{1 - (-r)^n\}$$

$$\therefore p_n = \frac{(1-r)^3 \{1 - (-r)^n\}}{1+r}$$

.....(答)

参考 p_3 を求めて検算してもよい。

$$p_3 = r(1-r)^3 + (1-r)(1-r)^4 = (1-r)^3 \{r + (1-r)^2\} = (1-r)^3 (1-r+r^2) = \frac{(1-r)^3 \{1 - (-r)^3\}}{1+r}$$

[4]

(1) (証明) $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 0$ であるから,

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$$

よって, $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ は示された.

また, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ が無理数でないと仮定すると, ある有理数 q を用いて,

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = q$$

と表される. この両辺を 2 乗すると,

$$5 + 2\sqrt{6} = q^2$$

となるので,

$$\sqrt{6} = \frac{q^2 - 5}{2}$$

$\frac{q^2 - 5}{2}$ は有理数であるから, これと等しい $\sqrt{6}$ は有理数である. このことは, $\sqrt{6}$ が無理数であることに矛盾する. したがって, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は無理数である.

(証明終わり)

(2) $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ とおくと,

$$x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

であるから,

$$x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$$

この両辺を 2 乗して整理すると,

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0$$

が得られる. よって, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ を解にもち, 係数がすべて有理数の 4 次方程式の 1 つは,

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

である. また, ① より,

$$(x^2)^2 - 10x^2 + 1 = 0$$

解の公式を用いて x^2 について解くと,

$$x^2 = 5 \pm 2\sqrt{6} = (\sqrt{3} \pm \sqrt{2})^2$$

よって,

$$x = \pm(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}) \quad (\text{ただし, 複号は任意の組合せ})$$

ゆえに, ① の解は,

$$\sqrt{3} + \sqrt{2}, \sqrt{3} - \sqrt{2}, -\sqrt{3} - \sqrt{2}, -\sqrt{3} + \sqrt{2} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(3) (証明) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ を解にもつ x の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c は有理数で, $a \neq 0$) が存在すると仮定すると,

$$a(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + b(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + c = 0$$

が成り立つので, この両辺に $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ を掛けると,

$$a(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + b + c(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 0$$

よって,

$$(a - c)\sqrt{2} + (a + c)\sqrt{3} = -b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

この両辺を 2 乗して整理すると,

$$2(a^2 - c^2)\sqrt{6} = b^2 - 5a^2 - 5c^2 - 2ac$$

ここで, $a^2 - c^2 \neq 0$ と仮定すると,

$$\sqrt{6} = \frac{b^2 - 5a^2 - 5c^2 - 2ac}{2(a^2 - c^2)}$$

この右辺は有理数であるから, 左辺の $\sqrt{6}$ は有理数となり, $\sqrt{6}$ が無理数であることに矛盾する. ゆえに, $a^2 - c^2 = 0$ すなわち, $a = \pm c$ である.

• $a = c$ のとき, ② より,

$$2a\sqrt{3} = -b$$

$a \neq 0$ であるから,

$$\sqrt{3} = -\frac{b}{2a}$$

この右辺は有理数であるから, 左辺の $\sqrt{3}$ は有理数となり, $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する.

• $a = -c$ のとき, ② より,

$$2a\sqrt{2} = -b$$

$a \neq 0$ であるから,

$$\sqrt{2} = -\frac{b}{2a}$$

この右辺は有理数であるから, 左辺の $\sqrt{2}$ は有理数となり, $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する.

以上より, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ を解にもち, 係数がすべて有理数の 2 次方程式は存在しない.

(証明終わり)

[5]

(1) $g(t) = \log(4t^2 + 1)$ とおく。 $f(x) = \int_x^{x+1} g(t) dt$ に対して,

$$\begin{aligned} f'(x) &= g(x+1) - g(x) \\ &= \log\{4(x+1)^2 + 1\} - \log(4x^2 + 1) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ のとき,

$$4(x+1)^2 + 1 = 4x^2 + 1 \Leftrightarrow 8x + 4 = 0 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}$$

よって, 右の増減表のように, $f(x)$ は $x = -\frac{1}{2}$ で極小値をもつ。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

..... (答)

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log(4t^2 + 1) dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \log(4t^2 + 1) dt \end{aligned}$$

ここで, $u = 2t$ とおくと, $dt = \frac{1}{2}du$, $\begin{array}{c|c} t & 0 \rightarrow \frac{1}{2} \\ u & 0 \rightarrow 1 \end{array}$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \int_0^1 \log(u^2 + 1) du \\ &= \left[u \log(u^2 + 1) \right]_0^1 - \int_0^1 u \cdot \frac{2u}{u^2 + 1} du \\ &= \left[u \log(u^2 + 1) \right]_0^1 - \int_0^1 2 \left(1 - \frac{1}{u^2 + 1} \right) du \\ &= \left[u \log(u^2 + 1) - 2u \right]_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{1}{u^2 + 1} du \end{aligned}$$

ここで, $u = \tan \theta$ とおくと, $du = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$, $\begin{array}{c|c} u & 0 \rightarrow 1 \\ \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{array}$ であり,

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \log 2 - 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \log 2 - 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 d\theta \\ &= \log 2 - 2 + \left[2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \log 2 - 2 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

よって, 極小値は $\log 2 + \frac{\pi}{2} - 2$ (答)

(2) 十分大きい x に対して, $f'(x) > 0$ である。平均値の定理より, $x-1 < c < x$ つまり $c < x < c+1$ を満たす実数 c が存在して,

$$\frac{f(x) - f(x-1)}{x - (x-1)} = f'(c)$$

が成り立つ。 $f'(c) > 0$ としてよいので,

$$cf'(c) < xf'(c) < (c+1)f'(c)$$

$$\therefore cf'(c) < x\{f(x) - f(x-1)\} < (c+1)f'(c) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

となる。

$$\begin{aligned} cf'(c) &= c \left[\log \{4(c+1)^2 + 1\} - \log(4c^2 + 1) \right] \\ &= c \log \frac{(4c^2 + 1) + 4(2c + 1)}{4c^2 + 1} \\ &= c \log \left(1 + \frac{8c + 4}{4c^2 + 1} \right) \\ &= c \cdot \frac{8c + 4}{4c^2 + 1} \log \left(1 + \frac{8c + 4}{4c^2 + 1} \right)^{\frac{4c^2 + 1}{8c + 4}} \\ &= \frac{8 + \frac{4}{c}}{4 + \frac{1}{c^2}} \log \left(1 + \frac{8c + 4}{4c^2 + 1} \right)^{\frac{4c^2 + 1}{8c + 4}} \end{aligned}$$

$x-1 < c < x$ より, はさみうちの原理で $\lim_{x \rightarrow \infty} c = \infty$ であるから,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} cf(c) = \frac{8}{4} \log e = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (c+1)f(c) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{c} \right) \cdot cf(c) = 2$$

① より, はさみうちの原理で, $\lim_{x \rightarrow \infty} x\{f(x) - f(x-1)\} = 2$ (答)