

2026年度 九州大学 前期 数学 文系

[1]

(1) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1$ から, $f'(x) = 6(x+3)(x-2)$

$f'(x) = 0$ のとき, $x = -3, 2$

ゆえに, $f(x)$ の増減は下表のようになる.

x	...	-3	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	82	↘	-43	↗

したがって, $x = -3$ で極大値 82, $x = 2$ で極小値 -43 (答) をとる.

(2) 曲線 C は $y = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & (|x| \geq 1) \\ -x^2 + 1 & (|x| < 1) \end{cases}$

直線 l は点 $(-1, 0)$ を通り傾き 1 であるから $y = x + 1$

(i) $|x| \geq 1$ のとき,

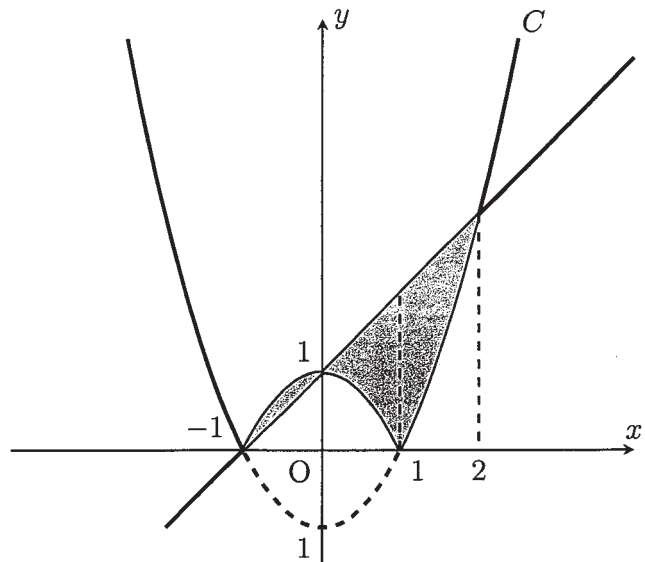
$$x^2 - 1 = x + 1 \text{ とすると, } x^2 - x - 2 = 0 \iff x = -1, 2$$

(ii) $|x| < 1$ のとき,

$$-x^2 + 1 = x + 1 \text{ とすると, } -x^2 - x = 0 \iff x = -1, 0$$

$$|x| < 1 \text{ より } x = 0$$

したがって, C と l の共有点の x 座標は $x = -1, 0, 2$ である.



上図より求める面積を S とおくと,

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^0 \{(-x^2+1)-(x+1)\}dx + \int_0^1 \{(x+1)-(-x^2+1)\}dx + \int_1^2 \{(x+1)-(x^2-1)\}dx \\
 &= \int_{-1}^0 (-x^2-x)dx + \int_0^1 (x^2+x)dx + \int_1^2 (-x^2+x+2)dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_1^2 \\
 &= \frac{13}{6} \dots\dots\dots(\text{答}) \text{である.}
 \end{aligned}$$

(2) 積分計算の別解

$-1 \leq x \leq 0$ で, $y = x+1$ と $y = -x^2+1$ で囲まれる図形の面積を S_1 ,

$-1 \leq x \leq 2$ で, $y = x+1$ と $y = x^2-1$ で囲まれる図形の面積を S_2 ,

$-1 \leq x \leq 1$ で, x 軸と $y = x^2-1$ で囲まれる図形の面積を S_3

とすると, 求める面積 S は

$$\begin{aligned}
 S &= S_1 + \{S_2 - S_3 - (S_3 - S_1)\} \\
 &= 2S_1 + S_2 - 2S_3 \\
 &= 2 \int_{-1}^0 \{(1-x^2)-(x+1)\}dx + \int_{-1}^2 \{(x+1)-(x^2-1)\}dx - 2 \int_{-1}^1 \{-(x^2-1)\}dx \\
 &= -2 \int_{-1}^0 x(x+1)dx - \int_{-1}^2 (x+1)(x-2)dx + 2 \int_{-1}^1 (x+1)(x-1)dx \\
 &= -2 \left[-\frac{1}{6}\{0-(-1)\}^3\right] - \left[-\frac{1}{6}\{2-(-1)\}^3\right] + 2 \left[-\frac{1}{6}\{1-(-1)\}^3\right] \\
 &= \frac{13}{6} \dots\dots\dots(\text{答}) \text{である.}
 \end{aligned}$$

[2]

(1) 点 $P(p, q, r)$ とおく. ただし, 条件から $q \leq -1$ ① である.

点 P が S 上にあることから

$$(p-1)^2 + (q+1)^2 + (r+1)^2 = 1 \quad \text{..... ②}$$

$\overrightarrow{BA} = -(1, 1, -1), \overrightarrow{BC} = 2(1, 0, 1)$ から, $\vec{a} = (1, 1, -1), \vec{b} = (1, 0, 1)$ とする.

直線 OP が α と直交することにより

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} \cdot \vec{a} = 0 \\ \overrightarrow{OP} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p+q-r=0 & \text{..... ③} \\ p+r=0 & \text{..... ④} \end{cases}$$

① に注意して, ②, ③, ④ から $(p, q, r) = (1, -2, -1)$ となる.

よって, P の座標は $(1, -2, -1)$ (答) である.

(2) $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1), \overrightarrow{AC} = (3, 1, 1)$ と条件から

$$\overrightarrow{OH} = (s+3t+1, s+t+1, -s+t+1)$$

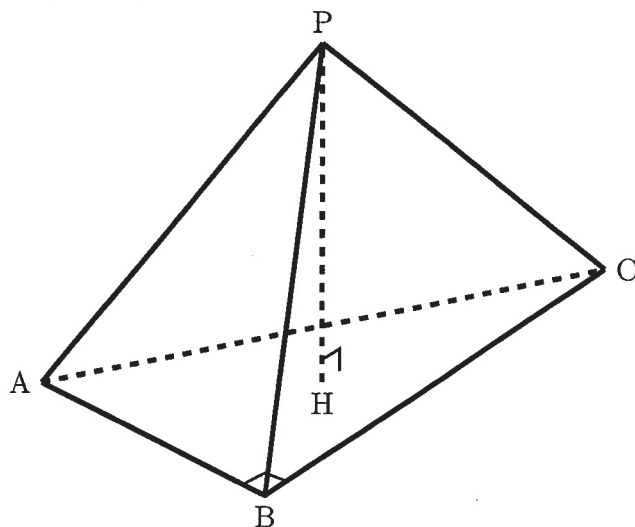
(1) の結果を利用して

$$\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP} = (s+3t, s+t+3, -s+t+2) \quad \text{..... ⑤}$$

P から α に下ろした垂線と α との交点が H であることから, $\overrightarrow{PH} \perp \alpha$ により

$$\begin{cases} \overrightarrow{PH} \cdot \vec{a} = 0 \\ \overrightarrow{PH} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3s+3t+1=0 & \text{..... ⑥} \\ 4t+2=0 & \text{..... ⑦} \end{cases}$$

⑥, ⑦ から, $(s, t) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$ (答) である.



(3) $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{3}, |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{2}$ と, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ から $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ であることにより

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{6}$$

また, (2) の結果を ⑤ に代入して, $\overrightarrow{PH} = \frac{4}{3}(-1, 2, 1)$ となるから, $|\overrightarrow{PH}| = \frac{4}{3}\sqrt{6}$

ゆえに, 求める四面体 ABCP の体積を V とおくと

$$V = \frac{1}{3} \cdot \triangle ABC \cdot |\overrightarrow{PH}| = \frac{1}{3} \times \sqrt{6} \times \frac{4}{3}\sqrt{6} = \frac{8}{3} \quad \dots\dots\dots (\text{答}) \text{ である.}$$

[3]

- (1) $\sqrt{2}$ は正の実数であるから有理数と仮定すると、互いに素な2つの自然数 p, q を用いて、

$$\sqrt{2} = \frac{q}{p}$$

と表せる。分母を払い両辺を2乗すると、

$$2p^2 = q^2 \quad \dots\dots ①$$

q^2 は偶数なので q は偶数である。そこで、自然数 l を用いて $q = 2l$ と表し、①へ代入すると、

$$2p^2 = (2l)^2 \quad \text{すなわち} \quad p^2 = 2l^2$$

p^2 は偶数なので p は偶数であるが、 p と q が互いに素であることに矛盾する。

よって、 $\sqrt{2}$ は無理数である。 ……(証明終わり)

- (2) すべての自然数 n に対して、

$$\text{自然数 } x_n, y_n \text{ を用いて } (\sqrt{2} + 1)^n = x_n + y_n\sqrt{2} \quad \text{と表せる} \quad \dots\dots (*)$$

ことを数学的帰納法で示す。

[I] $n=1$ のとき、 $(\sqrt{2} + 1)^1 = 1 + 1 \cdot \sqrt{2}$ より $x_1 = 1, y_1 = 1$ なので(*)は成り立つ。

[II] $n=k$ のとき、(*)が成り立つと仮定する。

すなわち自然数 x_k, y_k を用いて $(\sqrt{2} + 1)^k = x_k + y_k\sqrt{2}$ と表せるとする。このとき、

$$(\sqrt{2} + 1)^{k+1} = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 1)^k = (1 + \sqrt{2})(x_k + y_k\sqrt{2}) = (x_k + 2y_k) + (x_k + y_k)\sqrt{2}$$

$x_k + 2y_k, x_k + y_k$ は自然数、 $\sqrt{2}$ は無理数より、 $x_{k+1} = x_k + 2y_k, y_{k+1} = x_k + y_k$ なる

自然数 x_{k+1}, y_{k+1} を用いて $(\sqrt{2} + 1)^{k+1} = x_{k+1} + y_{k+1}\sqrt{2}$ と表せるから、

$n = k+1$ についても(*)は成り立つ。

[I][II]より(*)は示され、 $x_{n+1} = x_n + 2y_n, y_{n+1} = x_n + y_n$ が成り立つことから、

$$x_{n+1}^2 - 2y_{n+1}^2 = (x_n + 2y_n)^2 - 2(x_n + y_n)^2 = -(x_n^2 - 2y_n^2)$$

数列 $\{x_n^2 - 2y_n^2\}$ は初項 $x_1^2 - 2y_1^2 = 1^2 - 2 \cdot 1^2 = -1$ 、公比 -1 の等比数列なので、

$$x_n^2 - 2y_n^2 = (-1)^n \quad \text{すなわち} \quad (x_n + y_n\sqrt{2})(x_n - y_n\sqrt{2}) = (-1)^n$$

$$\text{よって、} (-1)^n \cdot (x_n - y_n\sqrt{2}) = \frac{1}{x_n + y_n\sqrt{2}} = \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2} + 1}\right)^n = (\sqrt{2} - 1)^n$$

$$\text{ゆえに、} (\sqrt{2} + 1)^n = x_n + y_n\sqrt{2}, (\sqrt{2} - 1)^n = (-1)^n \cdot (x_n - y_n\sqrt{2})$$

n が偶数のとき、 $(-1)^n = 1$ より、 $(\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{2} - 1)^n = 2x_n$ は整数であり、

n が奇数のとき、 $(-1)^n = -1$ より、 $(\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{2} - 1)^n = 2y_n\sqrt{2}$

$2y_n\sqrt{2}$ が整数と仮定すると自然数であるから、自然数 r_n を用いて、

$$2y_n\sqrt{2} = r_n \quad \text{すなわち} \quad \sqrt{2} = \frac{r_n}{2y_n}$$

$\sqrt{2}$ は無理数であるが、 $\frac{r_n}{2y_n}$ は有理数なので矛盾する。よって、 $2y_n\sqrt{2}$ は整数でない。

以上から、 $(\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{2} - 1)^n$ が整数となるための、 n がみたすべき必要十分条件は、

n が偶数であることである。 ……(答)

1° (2)の別解

m を自然数とする.

(i) $n = 2m$ のとき,

$$\begin{aligned}(\sqrt{2} + 1)^{2m} &= \sum_{k=0}^m {}_{2m}C_{2k} (\sqrt{2})^{2k} \cdot 1^{2m-2k} + \sum_{k=1}^m {}_{2m}C_{2k-1} (\sqrt{2})^{2k-1} \cdot 1^{2m-2k+1} \\&= \sum_{k=0}^m {}_{2m}C_{2k} \cdot 2^k + \sum_{k=1}^m {}_{2m}C_{2k-1} (\sqrt{2})^{2k-1} \\(\sqrt{2} - 1)^{2m} &= \sum_{k=0}^m {}_{2m}C_{2k} (\sqrt{2})^{2k} \cdot (-1)^{2m-2k} + \sum_{k=1}^m {}_{2m}C_{2k-1} (\sqrt{2})^{2k-1} \cdot (-1)^{2m-2k+1} \\&= \sum_{k=0}^m {}_{2m}C_{2k} \cdot 2^k - \sum_{k=1}^m {}_{2m}C_{2k-1} (\sqrt{2})^{2k-1}\end{aligned}$$

よって, $(\sqrt{2} + 1)^{2m} + (\sqrt{2} - 1)^{2m} = 2 \sum_{k=0}^m {}_{2m}C_{2k} \cdot 2^k$ は整数である.

(ii) $n = 2m - 1$ のとき,

$$\begin{aligned}(\sqrt{2} + 1)^{2m-1} &= \sum_{k=0}^{m-1} {}_{2m-1}C_{2k} (\sqrt{2})^{2k} \cdot 1^{2m-2k-1} + \sum_{k=1}^m {}_{2m-1}C_{2k-1} (\sqrt{2})^{2k-1} \cdot 1^{2m-2k} \\&= \sum_{k=0}^{m-1} {}_{2m-1}C_{2k} \cdot 2^k + \sum_{k=1}^m {}_{2m-1}C_{2k-1} (\sqrt{2})^{2k-1} \\(\sqrt{2} - 1)^{2m-1} &= \sum_{k=0}^{m-1} {}_{2m-1}C_{2k} (\sqrt{2})^{2k} \cdot (-1)^{2m-2k-1} + \sum_{k=1}^m {}_{2m-1}C_{2k-1} (\sqrt{2})^{2k-1} \cdot (-1)^{2m-2k} \\&= - \sum_{k=0}^{m-1} {}_{2m-1}C_{2k} \cdot 2^k + \sum_{k=1}^m {}_{2m-1}C_{2k-1} (\sqrt{2})^{2k-1}\end{aligned}$$

よって, $(\sqrt{2} + 1)^{2m-1} + (\sqrt{2} - 1)^{2m-1} = 2 \sum_{k=1}^m {}_{2m-1}C_{2k-1} (\sqrt{2})^{2k-1} = 2\sqrt{2} \sum_{k=1}^m {}_{2m-1}C_{2k-1} \cdot 2^{k-1}$

ここで, $2 \sum_{k=1}^m {}_{2m-1}C_{2k-1} \cdot 2^{k-1}$ は自然数であるから s_m とおくと, $s_m \sqrt{2}$ と表せる.

$s_m \sqrt{2}$ が整数と仮定すると自然数であるから, 自然数 t_m を用いて,

$$s_m \sqrt{2} = t_m \text{ すなわち } \sqrt{2} = \frac{t_m}{s_m}$$

$\sqrt{2}$ は無理数であるが, $\frac{t_m}{s_m}$ は有理数なので矛盾する. よって, $s_m \sqrt{2}$ は整数でない.

(i)(ii)より, $(\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{2} - 1)^n$ が整数となるための, n がみたすべき必要十分条件は,

n が偶数であることである.(答)

〔4〕

- (1) 3回硬貨を投げたとき、左から1, 2, 3番目の玉がすべて黒であるのは、3回とも裏が出るときであるから、求める確率 p_1 は、

$$p_1 = (1-r)^3 \quad \text{.....(答)}$$

- 4回硬貨を投げたとき、左から2, 3, 4番目の玉がすべて黒であるのは、4回とも裏が出るときであるから、求める確率 p_2 は、

$$p_2 = (1-r)^4 \quad \text{.....(答)}$$

- (2) $n+2$ 回硬貨を投げたとき、左から1, n , $n+1$, $n+2$ 番目の玉がすべて黒であるのは、1回目に裏が出て1番目の玉が黒で、2番目から改めて左から1番目と考えて $n-1$, n , $n+1$ 番目の玉がすべて黒であるときであるから、求める確率は、 $n \geq 2$ のとき、

$$(1-r)p_{n-1} \quad \text{.....(答)}$$

- (3) $n+2$ 回硬貨を投げたとき、左から n , $n+1$, $n+2$ 番目の玉がすべて黒であるのは、次の(i)(ii)のいずれかのときである。

- (i) 1回目に裏が出て1番目の玉が黒のとき、(2)の結果より確率は、

$$(1-r)p_{n-1}$$

- (ii) 1回目に表が出て1, 2番目の玉が白のとき、3番目から改めて左から1番目と考えて $n-2$, $n-1$, n 番目の玉がすべて黒であるから、確率は、

$$r p_{n-2}$$

- 以上(i)(ii)より p_n を p_{n-2} , p_{n-1} を用いて表すと、 $n \geq 3$ のとき、

$$p_n = (1-r)p_{n-1} + r p_{n-2} \quad \text{.....(答)}$$

- (4) (3)の結果より、 $n \geq 1$ のとき、

$$p_{n+2} = (1-r)p_{n+1} + r p_n$$

であり、

$$\begin{cases} p_{n+2} + r p_{n+1} = p_{n+1} + r p_n \\ p_{n+2} - p_{n+1} = -r(p_{n+1} - p_n) \end{cases}$$

である。数列 $\{p_{n+1} + r p_n\}$ は、初項が $p_2 + r p_1$ 、公比が1の等比数列であり、数列 $\{p_{n+1} - p_n\}$ は、初項が $p_2 - p_1$ 、公比が $-r$ の等比数列であるから、 $n \geq 1$ のとき、

$$\begin{cases} p_{n+1} + r p_n = (p_2 + r p_1) \cdot 1^{n-1} = (1-r)^4 + r(1-r)^3 = (1-r)^3 \\ p_{n+1} - p_n = (p_2 - p_1)(-r)^{n-1} = \{(1-r)^4 - (1-r)^3\}(-r)^{n-1} = (1-r)^3(-r)^n \end{cases}$$

である。辺々引くと、

$$(1+r)p_n = (1-r)^3 \{1 - (-r)^n\}$$

$$\therefore p_n = \frac{(1-r)^3 \{1 - (-r)^n\}}{1+r}$$

.....(答)

〔参考〕 p_3 を求めて検算してもよい。

$$p_3 = r(1-r)^3 + (1-r)(1-r)^4 = (1-r)^3 \{r + (1-r)^2\} = (1-r)^3 (1-r+r^2) = \frac{(1-r)^3 \{1 - (-r)^3\}}{1+r}$$