

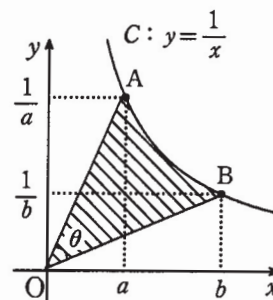
2026年度 名古屋大学 前期 数学 理系

1

(1) $a < b$ より, 2点 A, B の位置関係は図のようになる.

S は図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{a} + \int_a^b \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{1}{b} \\ &= \left[\log x \right]_a^b \\ &= \log b - \log a \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$



(2) 直線 OA, OB と x 軸の正方向とのなす角をそれぞれ α, β とする.

直線 OA の傾きは $\frac{1}{a^2}$, 直線 OB の傾きは $\frac{1}{b^2}$ であるから $\tan \alpha = \frac{1}{a^2}, \tan \beta = \frac{1}{b^2}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき, $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ であるから, $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$ より

$$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{1 + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2}}$$

よって $1 = \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2 + 1}$

$$b^2(1 - a^2) = 1 + a^2$$

$0 < a < 1$ より $1 - a^2 \neq 0$ であるから $b^2 = \frac{1 + a^2}{1 - a^2}$

$0 < a < 1, a < b$ より $\frac{1 + a^2}{1 - a^2} > 0, b > 0$ であるから $b = \sqrt{\frac{1 + a^2}{1 - a^2}} \quad \dots\dots (\text{答})$

(3) $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき, $b = \sqrt{\frac{1 + a^2}{1 - a^2}}$ であるから

$$S = \log \sqrt{\frac{1 + a^2}{1 - a^2}} - \log a = \frac{1}{2} \{ \log(1 + a^2) - \log(1 - a^2) \} - \log a$$

よって $\frac{dS}{da} = \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{1 + a^2} + \frac{2a}{1 - a^2} \right) - \frac{1}{a}$

$$= \frac{a^4 + 2a^2 - 1}{a(1 - a^4)}$$

$$= \frac{(a^2 + 1 + \sqrt{2})(a^2 + 1 - \sqrt{2})}{a(1 - a^4)}$$

$$= \frac{(a^2 + 1 + \sqrt{2})(a + \sqrt{\sqrt{2} - 1})(a - \sqrt{\sqrt{2} - 1})}{a(1 - a^4)}$$

したがって, $0 < a < 1$ における S の増減表は右のようになる.

ゆえに, S の最小値を与える a は

$$a = \sqrt{\sqrt{2} - 1} \quad \dots\dots (\text{答})$$

a	0	...	$\sqrt{\sqrt{2} - 1}$	...	1
$\frac{dS}{da}$		-	0	+	
S			最小		

(1) 点Pが平面H上にあるとき, $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ をみたす実数 s, t が存在して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \\ &= (2, 1, 3) + s(a, 2, 1) + t(-1, -1, -3) \\ &= (2 + sa - t, 1 + 2s - t, 3 + s - 3t) \quad \dots\dots ①\end{aligned}$$

点Qが直線DE上にあるとき, $\overrightarrow{DQ} = u\overrightarrow{DE}$ をみたす実数 u が存在して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OD} + u\overrightarrow{DE} \\ &= (-1, 2, 1) + u(-2, -1, -1) \\ &= (-1 - 2u, 2 - u, 1 - u) \quad \dots\dots ②\end{aligned}$$

平面Hが直線DEと共有点をもつのは, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$ となる実数 s, t, u が存在するときであり,

①, ②より

$$\begin{cases} 2 + as - t = -1 - 2u \\ 1 + 2s - t = 2 - u \\ 3 + s - 3t = 1 - u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} as - t + 2u = -3 & \dots\dots ③ \\ 2s - t + u = 1 & \dots\dots ④ \\ s - 3t + u = -2 & \dots\dots ⑤ \end{cases}$$

$$④ - ⑤ \text{ より } s + 2t = 3 \quad \dots\dots ⑥$$

$$③ - ④ \times 2 \text{ より } (a - 4)s + t = -5 \quad \dots\dots ⑦$$

$$⑦ \times 2 - ⑥ \text{ より } (2a - 9)s = -13 \quad \dots\dots ⑧$$

$a = \frac{9}{2}$ のとき, ⑧の左辺は0となり実数 s は存在しない。

$a \neq \frac{9}{2}$ のとき, ⑥, ⑦, ⑧より実数 $s = -\frac{13}{2a - 9}$, $t = \frac{3a - 7}{2a - 9}$, $u = \frac{5a + 10}{2a - 9}$ が存在する。

ゆえに, 平面Hが直線DEと共有点をもつための a の条件は

$$a \neq \frac{9}{2} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) 平面 H が線分 DE と共有点をもつのは、 $a \neq \frac{9}{2}$ かつ $0 \leq u \leq 1$ のときであり、

$$(1) \text{より } 0 \leq \frac{5a+10}{2a-9} \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

(i) $a > \frac{9}{2}$ のとき

$$\textcircled{9} \Leftrightarrow 0 \leq 5a+10 \leq 2a-9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 5a+10 \\ 5a+10 \leq 2a-9 \\ a \geq -2 \\ a \leq -\frac{19}{3} \end{cases}$$

$-\frac{19}{3} < -2$ より、 $\textcircled{9}$ をみたす a は存在しない。

(ii) $a < \frac{9}{2}$ のとき

$$\textcircled{9} \Leftrightarrow 0 \geq 5a+10 \geq 2a-9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -2 \\ a \geq -\frac{19}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{19}{3} \leq a \leq -2$$

これは $a < \frac{9}{2}$ をみたす。

(i), (ii)より、平面 H が線分 DE と共有点をもつための a の条件は

$$-\frac{19}{3} \leq a \leq -2 \quad \dots\dots (\text{答})$$

(参考) $\textcircled{9}$ からの a の条件は次のようにして求めてもよい。

$a \neq \frac{9}{2}$ のもとで

$$0 \leq \frac{5a+10}{2a-9} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (5a+10)(2a-9) \leq (2a-9)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5a+10)(2a-9) \geq 0 \\ (2a-9)(3a+19) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -2, \quad \frac{9}{2} < a \\ -\frac{19}{3} \leq a < \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{19}{3} \leq a \leq -2$$

3

(1) $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ である.

条件 (*) より, 整数 a, b, c のどの 2 つの最大公約数も 1 であるから, a, b, c は共通の素因数を持たない. よって, $2, 3, 5$ はそれぞれ a, b, c のいずれか 1 つのみに素因数として含まれる. すなわち, $2^3, 3, 5$ は, a, b, c のいずれか 1 つのみに因数として含まれる.

したがって, a, b, c の組合せは以下の通りである.

- 1 が含まれない場合 : $\{3, 5, 8\}$
- 1 がちょうど 1 つ含まれる場合 : $\{1, 8, 15\}, \{1, 5, 24\}, \{1, 3, 40\}$
- 1 がちょうど 2 つ含まれる場合 : $\{1, 1, 120\}$
- 1 が 3 つ含まれる場合 : 存在しない

よって, 求める組は

$$(a, b, c) = (1, 1, 120), (1, 3, 40), (1, 5, 24), (1, 8, 15), (3, 5, 8) \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) $N!$ に含まれる素因数は, N 以下の異なる m 個の素数 $p_1, p_2, \dots, p_m$ のみであり,

$$N! = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m} \quad (k_1, k_2, \dots, k_m \text{ は } 1 \text{ 以上の整数})$$

と素因数分解される.

(1) と同様に, 条件 (*) を満たすとき, a, b, c は共通の素因数を持たない.

よって, 各素数 p_i ($i = 1, 2, \dots, m$) に着目すると, 因数 $p_i^{k_i}$ はそれぞれ a, b, c のいずれかただ 1 つに因数として含まれなければならない.

ここで, $p_1, p_2, \dots, p_m$ は互いに異なる素数であるから, m 個の因数 $p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \dots, p_m^{k_m}$ もすべて互いに異なる.

これら m 個の因数のそれぞれについて, a, b, c のいずれに含めるかは 3 通りずつある. m 個の因数が 1 つも含まれない数は 1 とすれば, 条件を満たす組 (a, b, c) が過不足なく定まる.

したがって, 求める組 (a, b, c) の個数は

$$3^m \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) 以下, 1 以上の整数 p, q に対して, $\gcd(p, q)$ で p と q の最大公約数を表すものとする.

(2) で求めた 3^m 個の組 (a, b, c) について, 3 つの数の中に等しいものがあるかどうかで場合分けを行う.

(i) 3 つの数がすべて等しい場合

条件 (*) より $\gcd(a, b) = \gcd(b, c) = \gcd(c, a) = 1$ であるから, $a = b = c = 1$ に限られる.

このとき $abc = 1$ であるが, $N \geq 2$ より $N! \geq 2$ であるから, $abc = N!$ を満たさず, 不適.

(ii) 2 つの数が等しく, 1 つの数がそれとは異なる場合

等しい 2 数を仮に a, b とすると, $\gcd(a, b) = 1$ より $a = b = 1$ となる.

このとき, 残る 1 つの数は $N!$ となり, $N \geq 2$ より, $N! \geq 2 > 1$ である.

組 $(1, 1, N!)$ の並べ方は $(1, 1, N!), (1, N!, 1), (N!, 1, 1)$ の 3 通りあり, これらは (2) の 3^m 個に含まれる.

このうち, $a \leq b \leq c$ を満たすものは $(1, 1, N!)$ の 1 通りのみである.

(iii) 3つの数がすべて異なる場合

(2) の 3^m 個のうち, (ii) の 3 通りを除いた $3^m - 3$ 個は, すべて a, b, c が互いに異なる値をとる組である.

異なる 3 つの数の組合せ 1 つにつき, $3! = 6$ 通りの順列が存在し, そのうち $a < b < c$ となる並び方は常に 1 通りである.

よって, この場合において条件を満たす組の個数は

$$\frac{3^m - 3}{6}$$

(i)～(iii) より, 求める総数は

$$1 + \frac{3^m - 3}{6} = \frac{6 + 3^m - 3}{6} = \frac{3^m + 3}{6} = \frac{3^{m-1} + 1}{2} \quad \dots\dots (答)$$

時刻が 1 増えるとき、点 $A(x, y)$ が $(x+1, y)$, $(x+1, y+1)$, $(x, y+1)$ に移動する事象をそれぞれ $\rightarrow$, $\nearrow$, $\uparrow$ と表す.

- (1) 時刻 0 から時刻が 1 増えるとき、 $\rightarrow$, $\nearrow$, $\uparrow$ のいずれが起きても (*) は成り立つから

$$P_1 = 1 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

時刻 2 までに (*) が成り立たなくなるのは「 $\rightarrow$ が 2 回連続起きる」または「 $\uparrow$ が 2 回連続起きる」ときに限られるから

$$P_2 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 2 = \frac{7}{9} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

時刻 3 までに (*) が成り立たなくなるのは「 $\rightarrow$ が 2 回連続起きる」, 「 $\rightarrow$ と $\nearrow$ が 1 回ずつ起きてから $\rightarrow$ が起きる」, 「 $\uparrow$ が 2 回連続起きる」, 「 $\uparrow$ と $\nearrow$ が 1 回ずつ起きてから $\uparrow$ が起きる」のいずれかのときに限られるから

$$P_3 = 1 - \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot {}_2C_1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot {}_2C_1 \right\} = \frac{17}{27} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

※ (2) を解ければ, (1) は (2) の結果を用いて解いた方が楽である.

- (2) (*) が成り立ちかつ時刻 n で点 A が $y - x = 1$ 上にある確率を c_n ,

(*) が成り立ちかつ時刻 n で点 A が $y - x = -1$ 上にある確率を d_n とすると

$$b_n = c_n + d_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

である.

(*) が成り立ちかつ時刻 $n+1$ で点 A が $y - x = 0$ 上にあるのは

- ・ (*) が成り立ちかつ時刻 n で点 A が $y - x = 1$ 上にあり, 次に $\rightarrow$ が起きる
- ・ (*) が成り立ちかつ時刻 n で点 A が $y - x = 0$ 上にあり, 次に $\nearrow$ が起きる
- ・ (*) が成り立ちかつ時刻 n で点 A が $y - x = -1$ 上にあり, 次に $\uparrow$ が起きる

のいずれかのときに限られるから

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{3} + c_n \cdot \frac{1}{3} + d_n \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(*) が成り立ちかつ時刻 $n+1$ で点 A が $y-x=1$ 上にあるのは

・ (*) が成り立ちかつ時刻 n で点 A が $y-x=1$ 上にあり, 次に $\nearrow$ が起きる

・ (*) が成り立ちかつ時刻 n で点 A が $y-x=0$ 上にあり, 次に $\uparrow$ が起きる

のいずれかのときに限られるから

$$c_{n+1} = c_n \cdot \frac{1}{3} + a_n \cdot \frac{1}{3} \cdots \textcircled{1}$$

(*) が成り立ちかつ時刻 $n+1$ で点 A が $y-x=-1$ 上にあるのは

・ (*) が成り立ちかつ時刻 n で点 A が $y-x=0$ 上にあり, 次に $\rightarrow$ が起きる

・ (*) が成り立ちかつ時刻 n で点 A が $y-x=-1$ 上にあり, 次に $\nearrow$ が起きる

のいずれかのときに限られるから

$$d_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{3} + d_n \cdot \frac{1}{3} \cdots \textcircled{2}$$

① + ② より

$$\begin{aligned} c_{n+1} + d_{n+1} &= \left(c_n \cdot \frac{1}{3} + a_n \cdot \frac{1}{3} \right) + a_n \cdot \frac{1}{3} + d_n \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{3} (c_n + d_n) \end{aligned}$$

$$\therefore b_{n+1} = \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n \cdots \cdots (\text{答})$$

(3) $P_n = a_n + b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であるから

$$\begin{aligned} P_{n+2} &= \underline{a_{n+2}} + \underline{b_{n+2}} \\ &= \left(\underline{\frac{1}{3} a_{n+1} + \frac{1}{3} b_{n+1}} \right) + \left(\underline{\frac{2}{3} a_{n+1} + \frac{1}{3} b_{n+1}} \right) \\ &= \frac{2}{3} (a_{n+1} + b_{n+1}) + \frac{1}{3} a_{n+1} \\ &= \frac{2}{3} (a_{n+1} + b_{n+1}) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} a_n + \frac{1}{3} b_n \right) \\ &= \frac{2}{3} P_{n+1} + \frac{1}{9} P_n \cdots \textcircled{3} \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

$$(4) \quad P_n \leq \alpha^{n-1} \dots (*)$$

を数学的帰納法により示す

(I) $n = 1$ のとき

$$\alpha^0 - P_1 = 1 - 1 = 0$$

より (*) は成り立つ.

$n = 2$ のとき

$$\alpha^1 - P_2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{3} - \frac{7}{9} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{9} = \frac{\sqrt{18} - \sqrt{16}}{9} > 0$$

より (*) は成り立つ.

(II) $n = k, k + 1$ ($k = 1, 2, \dots$) のとき, (*) が成り立つと仮定すると

③より

$$\begin{aligned} P_{k+2} &= \frac{2}{3}P_{k+1} + \frac{1}{9}P_k \\ &\leq \frac{2}{3}\alpha^k + \frac{1}{9}\alpha^{k-1} \\ &= \frac{2}{3}\alpha \cdot \alpha^{k-1} + \frac{1}{9}\alpha^{k-1} \\ &= \alpha^{k-1} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{3} + \frac{1}{9} \right) \\ &= \alpha^{k-1} \cdot \frac{3 + 2\sqrt{2}}{9} \\ &= \alpha^{k-1} \cdot \alpha^2 = \alpha^{k+1} \end{aligned}$$

となり, $n = k + 2$ でも (*) は成り立つ.

以上 (I), (II) より, すべての自然数について (*) は成り立つ. (証明終わり)

※ (4) は P_n を直接計算しても証明できる.

$$\beta = \frac{1 - \sqrt{2}}{3}$$

とすると, ③より

$$\begin{cases} P_{n+2} - \alpha P_{n+1} = \beta (P_{n+1} - \alpha P_n) \\ P_{n+2} - \beta P_{n+1} = \alpha (P_{n+1} - \beta P_n) \\ \therefore \begin{cases} P_{n+1} - \alpha P_n = \beta^{n-1} (P_2 - \alpha P_1) & \dots \textcircled{4} \\ P_{n+1} - \beta P_n = \alpha^{n-1} (P_2 - \beta P_1) & \dots \textcircled{5} \end{cases} \end{cases}$$

ここで

$$P_2 - \alpha P_1 = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{9} = -\sqrt{2} \cdot \frac{3 - 2\sqrt{2}}{9} = -\sqrt{2} \beta^2$$

であり, 同様に

$$P_2 - \beta P_1 = \sqrt{2} \alpha^2$$

であるから, ⑤ - ④より

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta) P_n &= \sqrt{2} \alpha^{n+1} + \sqrt{2} \beta^{n+1} \\ \therefore \frac{2\sqrt{2}}{3} P_n &= \sqrt{2} (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) \\ \therefore P_n &= \frac{3}{2} (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \alpha^{n-1} - P_n &= \alpha^{n-1} - \frac{3}{2} (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}) \\ &= \alpha^{n-1} \left(1 - \frac{3}{2} \alpha^2 \right) - \frac{3}{2} \beta^{n+1} \\ &= \alpha^{n-1} \left(1 - \frac{3 + 2\sqrt{2}}{6} \right) - \frac{3}{2} \beta^{n+1} \\ &= \alpha^{n-1} \cdot \frac{3 - 2\sqrt{2}}{6} - \frac{3}{2} \beta^{n+1} \\ &= \alpha^{n-1} \cdot \frac{3}{2} \beta^2 - \frac{3}{2} \beta^{n+1} \\ &= \frac{3}{2} \beta^2 (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) \end{aligned}$$

であり, $\alpha > 0$ と $|\alpha| > |\beta|$ より $\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} > 0$ であるから

$$P_n \leq \alpha^{n-1} \text{ (証明終わり)}$$