

2026年度 名古屋大学 前期 数学 文系

1

- (1) $f(x) = x^2 + p$ とすると $f'(x) = 2x$ であるから, $y = f(x)$ 上の点 $(t, t^2 + p)$ における接線の方程式は

$$y - (t^2 + p) = 2t(x - t)$$

$$y = 2tx - t^2 + p$$

である. これが, 点 $A(a, a^2)$ を通るとき

$$a^2 - (t^2 + p) = 2t(a - t)$$

$$t^2 - 2at + a^2 - p = 0$$

が成り立つ. この t の 2 次方程式の解が b, c ($b < c$) であるから

$$b = a - \sqrt{p}, \quad c = a + \sqrt{p} \cdots \cdots (\text{答})$$

である.

- (2) 直線 AB, AC の傾きはそれぞれ $f'(b), f'(c)$ であり

$$f'(b)f'(c) = 2b \cdot 2c$$

$$= 4(a - \sqrt{p})(a + \sqrt{p})$$

$$= 4(a^2 - p)$$

である. $\theta = \angle CAB = \frac{\pi}{2}$ のとき, $f'(b)f'(c) = -1$ であるから

$$4(a^2 - p) = -1$$

$$p = a^2 + \frac{1}{4} \cdots \cdots (\text{答})$$

である.

- (3) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ の x 軸正方向からの反時計回りの回転角を

θ_1, θ_2 ($-\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \theta_1 < \frac{3}{2}\pi$) とすると

$$\begin{cases} \tan \theta_1 = f'(b) = 2a - 2\sqrt{p} \\ \tan \theta_2 = f'(c) = 2a + 2\sqrt{p} \end{cases}$$

である. $\theta = \theta_1 - \theta_2$ であり

$$\tan \theta = \tan(\theta_1 - \theta_2)$$

$$= \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2}$$

$$= \frac{(2a - 2\sqrt{p}) - (2a + 2\sqrt{p})}{1 + (2a - 2\sqrt{p})(2a + 2\sqrt{p})}$$

$$= \frac{-4\sqrt{p}}{1 + 4a^2 - 4p} \cdots \cdots (\text{答})$$

である.

- (4) $\theta \geq \frac{\pi}{3}, \theta \neq \frac{\pi}{2}$ のとき

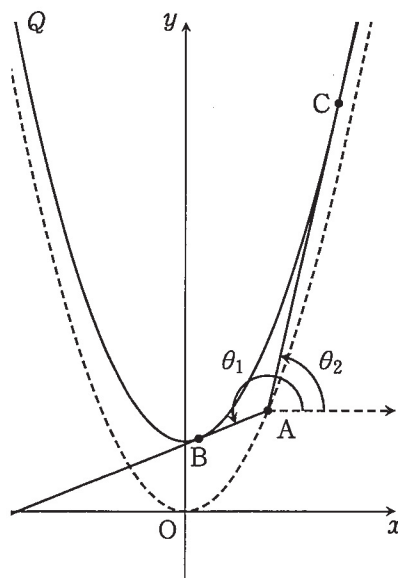
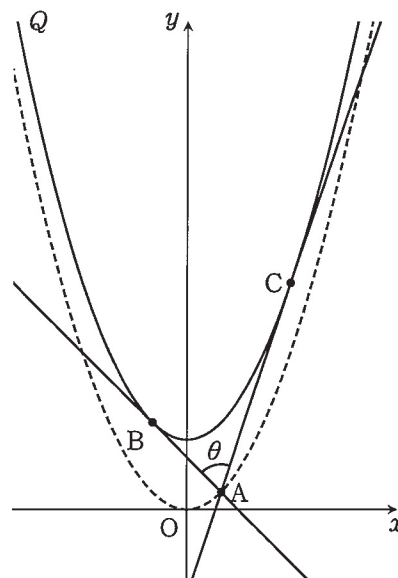
$$\tan \theta < 0, \quad \sqrt{3} \leq \tan \theta$$

である. このとき

$$\frac{1}{\tan \theta} < 0, \quad 0 < \frac{1}{\tan \theta} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

すなわち

$$\frac{1 + 4a^2 - 4p}{-4\sqrt{p}} < 0, \quad 0 < \frac{1 + 4a^2 - 4p}{-4\sqrt{p}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$



である。(2)と合わせて $\theta \geq \frac{\pi}{3}$ となる条件は

$$\frac{1+4a^2-4p}{-4\sqrt{p}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$4a^2 \geq 4p-1-\frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{p}$$

である。これがすべて実数 a について成り立つ条件は

$$4p-1-\frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{p} \leq 0$$

$$4\sqrt{3}p-4\sqrt{p}-1 \leq 0$$

$$(2\sqrt{3}p+1)(2\sqrt{p}-\sqrt{3}) \leq 0$$

$$\sqrt{p} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。したがって、すべての実数 a について対して $\theta \geq \frac{\pi}{3}$ が成り立つ p の範囲は

$$0 < p \leq \frac{3}{4} \dots \dots (\text{答})$$

である。

2

(1) $abc = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ である.

$a \leq b, a \leq c$ より

$$a^3 \leq abc = 120$$

$a \geq 5$ とすると $a^3 \geq 125$ となり不適.

$a = 1, 2, 3, 4$ のいずれかである.

$a = 2, 4$ のときは, b, c のいずれかに素因数 2 が含まれることになり,

a と b, a と c の最大公約数が 1 であることに反する.

よって, $a = 1, 3$ である.

(ア) $a = 1$ のとき. $1 \leq b \leq c$ である.

$$bc = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$b \leq c$ より

$$b^2 \leq bc = 120$$

$b \geq 11$ とすると $b^2 \geq 121$ となり不適. よって, $1 \leq b \leq 10$ である.

b と c の最大公約数が 1 であることに注意して

$$\begin{aligned} (b, c) &= (2^0, 2^3 \cdot 3 \cdot 5), (2^3, 3 \cdot 5), (3, 2^3 \cdot 5), (5, 2^3 \cdot 3) \\ &= (1, 120), (8, 15), (3, 40), (5, 24) \end{aligned}$$

(イ) $a = 3$ のとき. $3 \leq b \leq c$ である.

$$bc = 2^3 \cdot 5$$

$b \leq c$ より

$$b^2 \leq bc = 40$$

$b \geq 7$ とすると $b^2 \geq 49$ となり不適. よって, $3 \leq b \leq 6$ である.

b と c の最大公約数が 1 であることに注意して

$$(b, c) = (5, 8)$$

以上より, 求める整数の組 (a, b, c) は

$$(a, b, c) = (1, 1, 120), (1, 3, 40), (1, 5, 24), (1, 8, 15), (3, 5, 8) \quad \dots \dots (\text{答})$$

(2) (1) の大小関係の制約を解除する.

$(a, b, c) = (1, 1, 120)$ のときは 3 通り. 他は 3! 通りあるから,

求める整数の組 (a, b, c) の個数は

$$3 + 3! \cdot 4 = 27 \quad \dots \dots (\text{答})$$

(3) N 以下の素数を小さいものから順に

$$p_1, p_2, \dots, p_m$$

とする. $N!$ にこれらの素数がそれぞれ $q_1, q_2, \dots, q_m$ 個含まれるとする. すなわち

$$N! = p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot \dots \cdot p_m^{q_m}$$

である. a, b, c の最大公約数が 1 であることに注意すれば,

各素因数 p_i ($i = 1, 2, \dots, m$) が q_i 個すべて a, b, c のどれか 1 つに振り分けられる.

ただし, a, b, c に素因数が 1 つも振り分けられなかったときは 1 とする.

振り分け方は 3^m 通りある.

求める整数の組 (a, b, c) の個数は 3^m である. $\dots \dots (\text{答})$

【別解】

(2) $abc = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ である.

$a = 2^i \cdot 3^l \cdot 5^p$, $b = 2^j \cdot 3^m \cdot 5^q$, $c = 2^k \cdot 3^n \cdot 5^r$ の形となる.

ただし, $i + j + k = 3$, $l + m + n = 1$, $p + q + r = 1$ で,
文字はすべて 0 以上の整数である.

a, b, c の最大公約数が 1 であることに注意すれば,
 i, j, k については

$$(i, j, k) = (3, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 3)$$

の 3 通り.

l, m, n については

$$(l, m, n) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$$

の 3 通り.

p, q, r については

$$(p, q, r) = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$$

の 3 通り.

よって, $abc = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ をみたす整数の組 (a, b, c) の総数は

$$3^3 = 27 \quad \dots\dots (\text{答})$$

3

時刻が1増えたとき、点Aが (x, y) から $(x+1, y)$ に移動する事象をX,
時刻が1増えたとき、点Aが (x, y) から $(x+1, y+1)$ に移動する事象をY,
時刻が1増えたとき、点Aが (x, y) から $(x, y+1)$ に移動する事象をZとする。

- (1) 時刻0から、X, Y, Zのどの事象が起こっても、時刻1で点Aは $-1 \leq y-x \leq 1$ にあるので、 $P_1 = 1$ (答)

時刻2で点Aが $-1 \leq y-x \leq 1$ にあるのは、いずれかの場合である。

時刻0から時刻2の間に、XYまたはXZの順に起こる

時刻0から時刻2の間に、YXまたはYYまたはYZの順に起こる

時刻0から時刻2の間に、ZXまたはZYの順に起こる

よって、 $P_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot (2+3+2) = \frac{7}{9}$ (答)

時刻0から時刻2の間に、XZまたはYYまたはZXの順に起こるとき、時刻2で点Aは、 $y=x$ 上にある。つまり、 $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{1}{3}$ の確率で、時刻2で点Aは $y=x$ 上にあり、

$\frac{7}{9} - \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$ の確率で、時刻2で点Aは $y=x \pm 1$ 上にある。

点Aが $y=x$ 上にあるとき、次の時刻で必ず $-1 \leq y-x \leq 1$ にあり、

点Aが $y=x \pm 1$ 上にあるとき、 $\frac{2}{3}$ の確率で、次の時刻は $-1 \leq y-x \leq 1$ にある。

よって、 $P_3 = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{17}{27}$ (答)

- (2) 時刻 $n+1$ で点Aが $y=x$ 上にあるのは、いずれかの場合である。

時刻 n で $y=x$ 上にあり、次に事象Yが起こる

時刻 n で $y=x+1$ 上にあり、次に事象Xが起こる

時刻 n で $y=x-1$ 上にあり、次に事象Zが起こる

時刻 $n+1$ で点Aが $y=x+1$ 上にあるのは、いずれかの場合である。

時刻 n で $y=x$ 上にあり、次に事象Zが起こる

時刻 n で $y=x+1$ 上にあり、次に事象Yが起こる

時刻 $n+1$ で点Aが $y=x-1$ 上にあるのは、いずれかの場合である。

時刻 n で $y=x$ 上にあり、次に事象Xが起こる

時刻 n で $y=x-1$ 上にあり、次に事象Yが起こる

以上より、

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \quad \dots\dots\dots (答)$$

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \quad \dots\dots\dots (答)$$

(3) $P_n = a_n + b_n$ である。

$$\begin{aligned}
 P_{n+2} &= a_{n+2} + b_{n+2} \\
 &= \frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}b_{n+1} + \frac{2}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}b_{n+1} \\
 &= \frac{2}{3}(a_{n+1} + b_{n+1}) + \frac{1}{3}a_{n+1} \\
 &= \frac{2}{3}P_{n+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n\right) \\
 &= \frac{2}{3}P_{n+1} + \frac{1}{9}P_n \qquad \dots\dots\dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

(4) $P_n \leq \alpha^{n-1} \dots \textcircled{*}$

であることを、数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n = 1, 2$ のとき,

$\alpha^0 - P_1 = 0$ より, $n = 1$ のとき $\textcircled{*}$ が成り立つ。

$$\text{また, } \alpha - P_2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{3} - \frac{7}{9} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{9} = \frac{\sqrt{18} - \sqrt{16}}{9} > 0$$

より, $P_2 < \alpha$

よって, $n = 2$ のとき $\textcircled{*}$ は成り立つ。

(ii) $n = k, k + 1$ のとき, $\textcircled{*}$ が成り立つとすると仮定すると

$$P_{k+2} = \frac{2}{3}P_{k+1} + \frac{1}{9}P_k \leq \frac{2}{3}\alpha^k + \frac{1}{9}\alpha^{k-1} \dots \textcircled{①}$$

であり,

$$\frac{2}{3}\alpha^k + \frac{1}{9}\alpha^{k-1} = \alpha^{k-1}\left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{9}\right) = \alpha^{k-1} \cdot \frac{3 + 2\sqrt{2}}{9} = \alpha^{k-1} \cdot \alpha^2 = \alpha^{k+1}$$

① より, $P_{k+2} \leq \alpha^{k+1}$ といえ, $n = k + 2$ のときも $\textcircled{*}$ が成り立つ。

以上より, すべての自然数 n において $\textcircled{*}$ は成り立つ。(証明終わり)