

2026年度 東北大学 前期 数学 文系

- 1 (1) 接点の x 座標を t とする.

$(x^2)' = 2x$ より, C 上の点 (t, t^2) における接線の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t) \quad \therefore y = 2tx - t^2$$

これが点 $(u, u - 1)$ ($u > 0$) を通るとき

$$u - 1 = 2tu - t^2$$

$$\therefore t^2 - 2ut + u - 1 = 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = u^2 - u + 1 = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

より, ① は異なる 2 つの実数解をもつ.

よって, C 上の異なる 2 点における接線は異なることも考慮すると, C の接線で点 $(u, u - 1)$ を通るものはちょうど 2 本ある. (証明終)

- (2) 接点 P_1, P_2 の x 座標をそれぞれ t_1, t_2 ($t_1 \neq t_2$) とすると, t_1 と t_2 は ① の 2 実数解であるから, 解と係数の関係より

$$t_1 + t_2 = 2u, \quad t_1 t_2 = u - 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

線分 $P_1 P_2$ の垂直二等分線 m は, 2 点 $P_1(t_1, t_1^2), P_2(t_2, t_2^2)$ から等距離にある点の軌跡であるから, m の方程式は

$$(x - t_1)^2 + (y - t_1^2)^2 = (x - t_2)^2 + (y - t_2^2)^2$$

$$2(t_1 - t_2)x + 2(t_1^2 - t_2^2)y = (t_1^2 - t_2^2) + (t_1^4 - t_2^4)$$

$$2(t_1 - t_2)x + 2(t_1 - t_2)(t_1 + t_2)y = (t_1 - t_2)(t_1 + t_2) + (t_1 - t_2)(t_1 + t_2)(t_1^2 + t_2^2)$$

$$2x + 2(t_1 + t_2)y = t_1 + t_2 + (t_1 + t_2)\{(t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2\} \quad (\because t_1 \neq t_2)$$

$$\therefore x + 2uy = u + u(4u^2 - 2u + 2) \quad (\because \textcircled{2}) \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

と表せる.

ゆえに, $u \neq 0$ ($\because u > 0$) より, m は傾き $-\frac{1}{2u}$ をもつから y 軸と平行ではない.

したがって, m は y 軸と交わる. (証明終)

よって, m と y 軸の交点の y 座標 $q(u)$ は, ③ に $x = 0$ を代入したときの y の値であるから

$$q(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(4u^2 - 2u + 2)$$

$$= 2u^2 - u + \frac{3}{2}$$

$$= 2\left(u - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{11}{8}$$

したがって, u が正の実数全体を動くとき, $q(u)$ の最小値とそれを与える u の値は

$$\text{最小値 } \frac{11}{8}, \quad u = \frac{1}{4} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

[補足 1] (2) の ② 以降は, 次のように解くこともできる.

② を用いると, 直線 $P_1 P_2$ の傾きは $\frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1 - t_2} = t_1 + t_2 = 2u$ である.

ゆえに, $u > 0$ のとき線分 $P_1 P_2$ の垂直二等分線 m の傾きは $-\frac{1}{2u}$ となることより, m は y 軸と交わる.

また、線分 P_1P_2 の中点の座標は $\left(\frac{t_1+t_2}{2}, \frac{t_1^2+t_2^2}{2}\right)$ であり、②を用いると

$$\begin{aligned}\frac{t_1+t_2}{2} &= u \\ \frac{t_1^2+t_2^2}{2} &= \frac{1}{2}\{(t_1+t_2)^2 - 2t_1t_2\} = \frac{1}{2}\{4u^2 - 2(u-1)\} = 2u^2 - u + 1\end{aligned}$$

であるから、 m の方程式は

$$y - (2u^2 - u + 1) = -\frac{1}{2u}(x - u) \quad \therefore \quad y = -\frac{1}{2u}x + 2u^2 - u + \frac{3}{2}$$

よって

$$q(u) = 2u^2 - u + \frac{3}{2} = 2\left(u - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{11}{8}$$

より、 u が正の実数全体を動くとき、 $q(u)$ の最小値とそれを与える u の値は

$$\text{最小値 } \frac{11}{8}, \quad u = \frac{1}{4} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

[補足 2] 法線ベクトルを用いて ③ を求めてもよい.

$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} t_2 - t_1 \\ t_2^2 - t_1^2 \end{pmatrix} = (t_2 - t_1) \begin{pmatrix} 1 \\ t_2 + t_1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ t_1 + t_2 \end{pmatrix}$ より、 m の法線ベクトルの 1 つは $\begin{pmatrix} 1 \\ t_1 + t_2 \end{pmatrix}$ である.

m は線分 P_1P_2 の中点 $\left(\frac{t_1+t_2}{2}, \frac{t_1^2+t_2^2}{2}\right)$ を通るから、 m の方程式は

$$\left(x - \frac{t_1+t_2}{2}\right) + (t_1+t_2)\left(y - \frac{t_1^2+t_2^2}{2}\right) = 0$$

と表せ、これと ② から

$$(x - u) + 2u\{y - (2u^2 - u + 1)\} = 0$$

より、③ を得る.

(1) $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ (答)

(2) $(a, b, c) = (k, 2k, 3k)$ (k は任意の正整数) は $a^2 + 2b^2 = c^2$ を満たすから,
 $a^2 + 2b^2 = c^2$ を満たす正の整数の組 (a, b, c) は無数に存在する. (証明終)

(3) (前半)

正の整数の組 (a, b, c) が $a^2 + 2b^2 = c^2$ を満たすとき

$$2b^2 = c^2 - a^2$$

$$\therefore 2b^2 = (c+a)(c-a) \quad \dots\dots\dots ①$$

であるから, $(c+a)(c-a)$ は偶数である.

このことと, $c+a$ と $c-a$ の偶奇は一致する ($\because (c+a) - (c-a) = 2a$ が偶数) ことから

$c+a$ と $c-a$ はともに偶数であり

$$c+a = 2m, \quad c-a = 2n \quad (m \text{ と } n \text{ は整数})$$

とおける. これを①に代入すると

$$2b^2 = 2m \cdot 2n$$

$$\therefore b^2 = 2mn$$

であり, b^2 は偶数であるから b は偶数である.

以上から, $a+c$ と b はともに偶数である. (証明終)

(後半)

さらに a と c が偶数のとき

$$a = 2A, \quad b = 2B, \quad c = 2C \quad (A, B, C \text{ は正の整数})$$

とおけて, これを①に代入すると

$$2(2B)^2 = (2C+2A)(2C-2A)$$

$$\therefore 8B^2 = 4(C+A)(C-A)$$

$$\therefore 2B^2 = (C+A)(C-A) \quad \dots\dots\dots ②$$

である.

このとき, ①から b が偶数であることを導いたのと同じ議論によって,

②から B が偶数であることが導ける.

ゆえに, B が偶数であるから, $b (= 2B)$ は 4 の倍数である. (証明終)

$$(1) \quad |\vec{a}| = \sqrt{2}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{5}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \quad \dots\dots ①$$

D は OA を $s : (1-s)$ に内分する点であり,

E は OB を $t : (1-t)$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OD} = s \vec{a}, \quad \overrightarrow{OE} = t \vec{b}$$

である.

AE と BD が直交するから

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

$$\therefore (\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}) = 0$$

$$\therefore (t \vec{b} - \vec{a}) \cdot (s \vec{a} - \vec{b}) = 0$$

$$\therefore (st+1) \vec{a} \cdot \vec{b} - t |\vec{b}|^2 - s |\vec{a}|^2 = 0$$

$$\therefore st+1-5t-2s=0 \quad (\because ①)$$

$$\therefore (5-s)t = 1-2s$$

である. $5-s \neq 0$ ($\because 0 < s < 1$) であるから

$$t = \frac{1-2s}{5-s}$$

$\dots\dots$ (答)

である.

また, $0 < s < 1$ かつ $0 < t < 1$ より

$$0 < s < 1 \quad \text{かつ} \quad 0 < \frac{1-2s}{5-s} < 1$$

$$\therefore 0 < s < 1 \quad \text{かつ} \quad \underbrace{0 < 1-2s < 5-s}$$

各辺に $5-s$ を掛けた.

$0 < s < 1$ のもとでは $5-s > 0$ であるから,
不等号の向きは変わらない.

$$\therefore 0 < s < 1 \quad \text{かつ} \quad -4 < s < \frac{1}{2}$$

$$\therefore 0 < s < \frac{1}{2}$$

$\dots\dots$ (答)

である.

(2) $\triangle OAE$ と直線 BD にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{AF}{FE} \cdot \frac{EB}{BO} \cdot \frac{OD}{DA} = 1$$

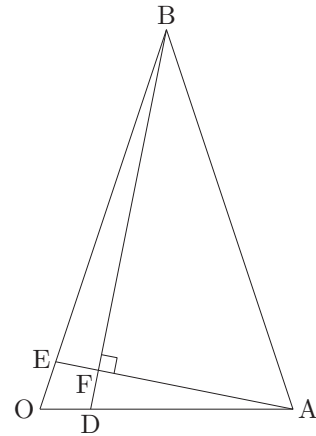
$$\therefore \frac{AF}{FE} \cdot \frac{1-t}{1} \cdot \frac{s}{1-s} = 1$$

$$\therefore \frac{AF}{FE} = \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1-s}{s}$$

$$= \frac{5-s}{4+s} \cdot \frac{1-s}{s} \quad \left(\because 1-t = 1 - \frac{1-2s}{5-s} = \frac{4+s}{5-s} \right)$$

$$= \frac{(5-s)(1-s)}{s(4+s)}$$

である.



ゆえに、F は AE を $(5-s)(1-s) : s(4+s)$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= \frac{s(4+s)}{(5-s)(1-s)+s(4+s)} \overrightarrow{OA} + \frac{(5-s)(1-s)}{(5-s)(1-s)+s(4+s)} \overrightarrow{OE} \\ &= \frac{s(4+s)}{2s^2-2s+5} \vec{a} + \frac{(5-s)(1-s)}{2s^2-2s+5} \left(\frac{1-2s}{5-s} \vec{b} \right) \quad \left(\because \overrightarrow{OE} = t \vec{b} = \frac{1-2s}{5-s} \vec{b} \right) \\ &= \frac{s(4+s)}{2s^2-2s+5} \vec{a} + \frac{(1-s)(1-2s)}{2s^2-2s+5} \vec{b} \quad \dots\dots (\text{答})\end{aligned}$$

である.

$$(3) \quad |\overrightarrow{OP}|^2 + 2\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \quad \dots\dots (*)$$

は、次のように変形できる.

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP}|^2 + 2(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF}) \cdot \overrightarrow{AB} &= 4 \\ \therefore |\overrightarrow{OP}|^2 + 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{AB} &= 4 \\ \therefore |\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 - 2\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{AB} &= 4 \\ \therefore |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{BA}|^2 = 9 + 2\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{AB} \quad \left(\because |\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 5 \right)\end{aligned}$$

ここで、 $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{BA}$ となるように点 N を定めると

$$\begin{aligned}\therefore |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}|^2 &= 9 + 2\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{AB} \\ \therefore |\overrightarrow{NP}|^2 &= 9 + 2\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

(この等式は「点 P と定点 N との距離の 2 乗が $9 + 2\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{AB}$ であること」を表している.)

となる.

ゆえに、「平面上の点 P で (*) を満たすもの全体」が半径 3 の円をなすための必要十分条件は

$$\begin{aligned}9 + 2\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{AB} &= 3^2 \\ \therefore \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \therefore \overrightarrow{OF} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) &= 0 \quad \dots\dots (\text{答})\end{aligned}$$

である. この条件が成り立つとき

$$\begin{aligned}\underbrace{\left((2s^2 - 2s + 5)\overrightarrow{OF} \right)}_{2s^2 - 2s + 5 \text{ 倍した}} \cdot \underbrace{(\vec{a} - \vec{b})}_{-1 \text{ 倍した}} &= 0 \\ \therefore \left(s(4+s)\vec{a} + (1-s)(1-2s)\vec{b} \right) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) &= 0 \\ \therefore s(4+s)|\vec{a}|^2 + \left(-s(4+s) + (1-s)(1-2s) \right) \vec{a} \cdot \vec{b} - (1-s)(1-2s)|\vec{b}|^2 &= 0 \\ \therefore -7s^2 + 16s - 4 = 0 \quad (\because \textcircled{1}) \\ \therefore (7s-2)(s-2) &= 0\end{aligned}$$

であり、(1) で求めた $0 < s < \frac{1}{2}$ にも注意すると

$$s = \frac{2}{7} \quad \dots\dots (\text{答})$$

である.

4

- (1) すべての実数 x に対して $f(-x) = f(x)$ であるから、 $y = f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である.

$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$$

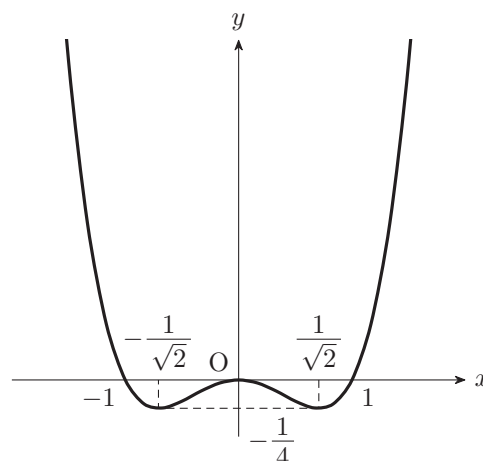
より、 $x \geq 0$ における増減は下表のようになる.

x	0	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...
$f'(x)$	(0)	-	0	+
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$

よって

$$\text{極大値 } 0, \text{ 極小値 } -\frac{1}{4} \quad \dots\dots (\text{答})$$

であり、グラフは右図のようになる.



- (2) グラフより、 x 軸と平行で曲線 $y = f(x)$ と異なる 2 点で接する直線 ℓ の方程式は

$$y = -\frac{1}{4} \quad \dots\dots (\text{答})$$

である.

- (3) グラフが y 軸に関して対称であることに注意すると

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ x^4 - x^2 - \left(-\frac{1}{4} \right) \right\} dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{4} x \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= 2 \left(\frac{1}{20\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{4}{15\sqrt{2}} \end{aligned}$$

である. また、曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれる部分の面積を T_0 とすると

$$T_0 = 2 \int_0^1 (-x^4 + x^2) dx = 2 \left[-\frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{4}{15}$$

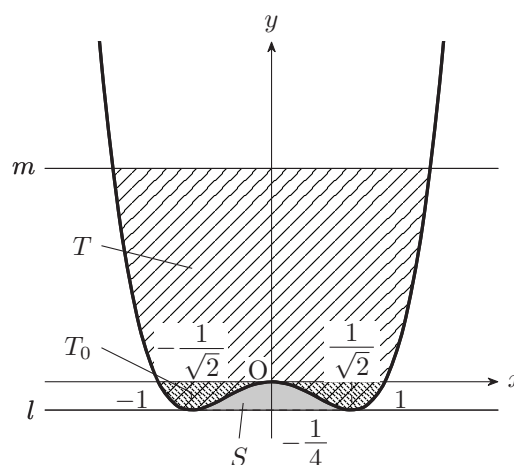
である. x 軸と平行で ℓ と異なる直線 m が曲線 $y = f(x)$ とちょうど 2 つの共有点をもつとき、図より

$$T > T_0$$

であるから

$$\frac{T}{S} > \frac{T_0}{S} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{4}{15\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

が成り立つ.



(参考)

直線 m と曲線 $y = f(x)$ の 2 つの交点の x 座標を $\pm p$ ($p > 1$)

とすると, m の方程式は

$$m : y = p^4 - p^2$$

である.

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_0^p \{p^4 - p^2 - (x^4 - x^2)\} dx \\ &= 2 \left[(p^4 - p^2)x - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^p \\ &= 2 \left(p^5 - p^3 - \frac{1}{5}p^5 + \frac{1}{3}p^3 \right) \\ &= \frac{8}{5}p^5 - \frac{4}{3}p^3 \\ &= \frac{4}{15}p^3(6p^2 - 5) \end{aligned}$$

であり, $p > 1$ であるから

$$T = \frac{4}{15}p^3(6p^2 - 5) > \frac{4}{15} \cdot 1 \cdot (6 - 5) = \frac{4}{15}$$

である. ゆえに

$$\frac{T}{S} > \frac{\frac{4}{15}}{\frac{4}{15\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

が成り立つ.

