

2026年度 東北大学 前期 数学 理系

- 1 (1) 接点の x 座標を t とする.

$(x^2)' = 2x$ より, C 上の点 (t, t^2) における接線の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x - t) \quad \therefore y = 2tx - t^2$$

これが点 $(u, u - 1)$ ($u > 0$) を通るとき

$$u - 1 = 2tu - t^2$$

$$\therefore t^2 - 2ut + u - 1 = 0 \quad \dots\dots\dots ①$$

① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = u^2 - u + 1 = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

より, ① は異なる 2 つの実数解をもつ.

よって, C 上の異なる 2 点における接線は異なることも考慮すると, C の接線で点 $(u, u - 1)$ を通るものはちょうど 2 本ある. (証明終)

- (2) 接点 P_1, P_2 の x 座標をそれぞれ t_1, t_2 ($t_1 \neq t_2$) とすると, t_1 と t_2 は ① の 2 実数解であるから, 解と係数の関係より

$$t_1 + t_2 = 2u, \quad t_1 t_2 = u - 1 \quad \dots\dots\dots ②$$

線分 $P_1 P_2$ の垂直二等分線 m は, 2 点 $P_1(t_1, t_1^2), P_2(t_2, t_2^2)$ から等距離にある点の軌跡であるから, m の方程式は

$$(x - t_1)^2 + (y - t_1^2)^2 = (x - t_2)^2 + (y - t_2^2)^2$$

$$2(t_1 - t_2)x + 2(t_1^2 - t_2^2)y = (t_1^2 - t_2^2) + (t_1^4 - t_2^4)$$

$$2(t_1 - t_2)x + 2(t_1 - t_2)(t_1 + t_2)y = (t_1 - t_2)(t_1 + t_2) + (t_1 - t_2)(t_1 + t_2)(t_1^2 + t_2^2)$$

$$2x + 2(t_1 + t_2)y = t_1 + t_2 + (t_1 + t_2)\{(t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2\} \quad (\because t_1 \neq t_2)$$

$$\therefore x + 2uy = u + u(4u^2 - 2u + 2) \quad (\because ②) \quad \dots\dots\dots ③$$

と表せる.

ゆえに, $u \neq 0$ ($\because u > 0$) より, m は傾き $-\frac{1}{2u}$ をもつから y 軸と平行ではない.

したがって, m は y 軸と交わる. (証明終)

よって, m と y 軸の交点の y 座標 $q(u)$ は, ③ に $x = 0$ を代入したときの y の値であるから

$$q(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(4u^2 - 2u + 2)$$

$$= 2u^2 - u + \frac{3}{2}$$

$$= 2\left(u - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{11}{8}$$

したがって, u が正の実数全体を動くとき, $q(u)$ の最小値とそれを与える u の値は

$$\text{最小値 } \frac{11}{8}, \quad u = \frac{1}{4} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

[補足 1] (2) の ② 以降は, 次のように解くこともできる.

② を用いると, 直線 $P_1 P_2$ の傾きは $\frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1 - t_2} = t_1 + t_2 = 2u$ である.

ゆえに, $u > 0$ のとき線分 $P_1 P_2$ の垂直二等分線 m の傾きは $-\frac{1}{2u}$ となることより, m は y 軸と交わる.

また、線分 P_1P_2 の中点の座標は $\left(\frac{t_1+t_2}{2}, \frac{t_1^2+t_2^2}{2}\right)$ であり、②を用いると

$$\begin{aligned}\frac{t_1+t_2}{2} &= u \\ \frac{t_1^2+t_2^2}{2} &= \frac{1}{2}\{(t_1+t_2)^2 - 2t_1t_2\} = \frac{1}{2}\{4u^2 - 2(u-1)\} = 2u^2 - u + 1\end{aligned}$$

であるから、 m の方程式は

$$y - (2u^2 - u + 1) = -\frac{1}{2u}(x - u) \quad \therefore \quad y = -\frac{1}{2u}x + 2u^2 - u + \frac{3}{2}$$

よって

$$q(u) = 2u^2 - u + \frac{3}{2} = 2\left(u - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{11}{8}$$

より、 u が正の実数全体を動くとき、 $q(u)$ の最小値とそれを与える u の値は

$$\text{最小値 } \frac{11}{8}, \quad u = \frac{1}{4} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

[補足 2] 法線ベクトルを用いて ③ を求めてもよい.

$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} t_2 - t_1 \\ t_2^2 - t_1^2 \end{pmatrix} = (t_2 - t_1) \begin{pmatrix} 1 \\ t_2 + t_1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ t_1 + t_2 \end{pmatrix}$ より、 m の法線ベクトルの 1 つは $\begin{pmatrix} 1 \\ t_1 + t_2 \end{pmatrix}$ である.

m は線分 P_1P_2 の中点 $\left(\frac{t_1+t_2}{2}, \frac{t_1^2+t_2^2}{2}\right)$ を通るから、 m の方程式は

$$\left(x - \frac{t_1+t_2}{2}\right) + (t_1+t_2)\left(y - \frac{t_1^2+t_2^2}{2}\right) = 0$$

と表せ、これと ② から

$$(x - u) + 2u\{y - (2u^2 - u + 1)\} = 0$$

より、③ を得る.

(1) $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ (答)

(2) $(a, b, c) = (k, 2k, 3k)$ (k は任意の正整数) は $a^2 + 2b^2 = c^2$ を満たすから,
 $a^2 + 2b^2 = c^2$ を満たす正の整数の組 (a, b, c) は無数に存在する. (証明終)

(3) (前半)

正の整数の組 (a, b, c) が $a^2 + 2b^2 = c^2$ を満たすとき

$$2b^2 = c^2 - a^2$$

$$\therefore 2b^2 = (c+a)(c-a) \quad \dots\dots\dots ①$$

であるから, $(c+a)(c-a)$ は偶数である.

このことと, $c+a$ と $c-a$ の偶奇は一致する ($\because (c+a) - (c-a) = 2a$ が偶数) ことから

$c+a$ と $c-a$ はともに偶数であり

$$c+a = 2m, \quad c-a = 2n \quad (m \text{ と } n \text{ は整数})$$

とおける. これを①に代入すると

$$2b^2 = 2m \cdot 2n$$

$$\therefore b^2 = 2mn$$

であり, b^2 は偶数であるから b は偶数である.

以上から, $a+c$ と b はともに偶数である. (証明終)

(後半)

さらに a と c が偶数のとき

$$a = 2A, \quad b = 2B, \quad c = 2C \quad (A, B, C \text{ は正の整数})$$

とおけて, これを①に代入すると

$$2(2B)^2 = (2C+2A)(2C-2A)$$

$$\therefore 8B^2 = 4(C+A)(C-A)$$

$$\therefore 2B^2 = (C+A)(C-A) \quad \dots\dots\dots ②$$

である.

このとき, ①から b が偶数であることを導いたのと同じ議論によって,

②から B が偶数であることが導ける.

ゆえに, B が偶数であるから, $b (= 2B)$ は 4 の倍数である. (証明終)

理系 $\boxed{3}$

(1) 実数全体を定義域とし, その上で連続かつ微分可能である 2 つの関数

$$g(x) = 8x^3 - 6x^2 + 2, \quad h(x) = 3x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

を用いて

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & (-1 \leq x \leq 1) \\ h(x) & (x < -1 \text{ または } 1 < x) \end{cases}$$

と表される.

$f(x)$ は $x \neq \pm 1$ では微分可能であるから

$f(x)$ がすべての実数 x の値で微分可能である

$\iff f(x)$ が $x = \pm 1$ で微分可能である

$$\iff \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} & \dots\dots \textcircled{1} \\ \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

であり, $f(1) = g(1)$, $f(-1) = g(-1)$ である. $g(x)$ が $x = 1$ で微分可能であることより

$$(\textcircled{1} \text{の右辺}) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1)$$

であるから, $\textcircled{1}$ は

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{h(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) \quad \dots\dots \textcircled{1}'$$

となる. $\textcircled{1}'$ ならば

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \{h(x) - g(1)\} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{h(x) - g(1)}{x - 1} \cdot (x - 1) = g'(1) \cdot 0 = 0$$

であり, $h(x)$ が $x = 1$ で連続であることより

$$h(1) - g(1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad h(1) = g(1) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

である. $\textcircled{3}$ より $\textcircled{1}'$ は

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = g'(1)$$

となり, $h(x)$ は $x = 1$ で微分可能であるから

$$h'(1) = g'(1) \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

となる. よって

$$\textcircled{1} \iff \begin{cases} \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \end{cases}$$

であり, 同様にして

$$\textcircled{2} \iff \begin{cases} h(-1) = g(-1) & \dots\dots \textcircled{5} \\ h'(-1) = g'(-1) & \dots\dots \textcircled{6} \end{cases}$$

である.

$$g'(x) = 24x^2 - 12x = 12x(2x - 1), \quad h'(x) = 12x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

より

$$\begin{cases} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \\ \textcircled{6} \end{cases} \iff \begin{cases} 3 + a + b + c + d = 4 \\ 12 + 3a + 2b + c = 12 \\ 3 - a + b - c + d = -12 \\ -12 + 3a - 2b + c = 36 \end{cases}$$

であるから, これを解いて

$$\begin{cases} a = 8 \\ b = -12 \\ c = 0 \\ d = 5 \end{cases} \quad \dots\dots(\text{答})$$

となる.

(2) (1) の結果より

$$g(x) = 8x^3 - 6x^2 + 2, \quad g'(x) = 24x^2 - 12x = 12x(2x - 1)$$

$$h(x) = 3x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 5, \quad h'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 24x = 12x(x^2 + 2x - 2)$$

であるから, $f(x)$ の増減は下表のようになる.

x	$\cdots$	$-1 - \sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

ここで

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

であり, また, $h(x)$ を $x^2 + 2x - 2$ で割る計算により

$$h(x) = (x^2 + 2x - 2)(3x^2 + 2x - 10) + 24x - 15$$

が成り立つので

$$f(-1 - \sqrt{3}) = h(-1 - \sqrt{3}) = 24(-1 - \sqrt{3}) - 15 = -39 - 24\sqrt{3}$$

である. $f\left(\frac{1}{2}\right) > f(-1 - \sqrt{3})$ であるから, $f(x)$ は

$$x = -1 - \sqrt{3} \text{ のとき最小値 } -39 - 24\sqrt{3} \quad \dots\dots(\text{答})$$

をとる.

4

- (m, n) から $(m+1, n)$ への移動を R (Right)
- (m, n) から $(m-1, n)$ への移動を L (Left)
- (m, n) から $(m, n+1)$ への移動を U (Up)
- (m, n) から $(m, n-1)$ への移動を D (Down)

とし、点 P の移動を、R, L, U, D の順列と同一視する.

時刻が 1 だけ増加するとき、R, L, U, D は同様に確からしく起こるから、R, L, U, D の順列は、

$$4^8 = 2^{16} \text{ 通り}$$

あり、これらはすべて同様に確からしい.

(1) 時刻 8 に点 P が $(4, 0)$ にあるような R, L, U, D の順列は、

- R を 6 個, L を 2 個並べる順列
- R を 5 個, L を 1 個, U を 1 個, D を 1 個並べる順列
- R を 4 個, U を 2 個, D を 2 個並べる順列

のいずれかである. よって、点 P が $(4, 0)$ にあるような順列は、

$${}_8C_2 + {}_8C_1 \cdot {}_7C_1 \cdot {}_6C_1 + {}_8C_2 \cdot {}_6C_2 = 2^4 \cdot 7^2 \text{ (通り)}$$

あるから、求める確率は、

$$\frac{2^4 \cdot 7^2}{2^{16}} = \frac{49}{2^{12}} = \frac{49}{4096} \quad \dots\dots ①(\text{答})$$

である.

(2) まず、 $x \geq 0, y \geq 0$ における双曲線上の格子点の座標を求める. $x^2 - y^2 = 16 \dots\dots ②$ を変形すると、

$$(x+y)(x-y) = 16$$

となり、 $x+y \geq x-y$ であることと、 $(x+y) - (x-y) = 2y$ より $x+y$ と $x-y$ の偶奇が一致することに注意すると、②を満たす 2 つの非負整数の組 (x, y) は、

$$(x+y, x-y) = (4, 4), (8, 2) \quad \text{より} \quad (x, y) = (4, 0), (5, 3)$$

である. よって、 $x \geq 0, y \geq 0$ における双曲線②上の格子点の座標は、

$$(4, 0), (5, 3)$$

である.

双曲線②は x 軸, y 軸のいずれにも対称であるから、双曲線②上の格子点の座標は、

$$(\pm 4, 0), (\pm 5, \pm 3) \quad (\text{複号任意})$$

である.

時刻 8 に点 P が $(-4, 0)$ にあるような R, L, U, D の順列は、時刻 8 に点 P が $(4, 0)$ にあるような R, L, U, D の順列に対して、R を L に、L を R に同時に置き換えた順列であるから、時刻 8 に点 P が $(\pm 4, 0)$ のいずれかにある確率は、①より、

$$2 \times \frac{49}{2^{12}} = \frac{49}{2^{11}} \quad \dots\dots ③$$

である.

時刻 8 に点 P が (5, 3) にあるような R, L, U, D の順列は, R を 5 個, U を 3 個並べる順列である. そのような順列は,

$${}_8C_3 = 2^3 \cdot 7 \text{ (通り)}$$

あるから, 時刻 8 に点 P が (5, 3) にある確率は,

$$\frac{2^3 \cdot 7}{2^{16}} = \frac{7}{2^{13}} \quad \dots\dots ④$$

である.

時刻 8 に点 P が (5, 3) にあるような R, L, U, D の順列に対して,

- R を L に, L を R に同時に置き換えると, 時刻 8 に点 P が (-5, 3) にあるような順列
- U を D に, D を U に同時に置き換えると, 時刻 8 に点 P が (5, -3) にあるような順列
- R を L に, L を R に, U を D に, D を U に同時に置き換えると, 時刻 8 に点 P が (-5, -3) にあるような順列

となるから, 時刻 8 に点 P が ($\pm 5, \pm 3$) のいずれかにある確率は, ④より,

$$4 \times \frac{7}{2^{13}} = \frac{7}{2^{11}} \quad \dots\dots ⑤$$

である.

よって, 求める確率は, ③, ⑤より,

$$\frac{49}{2^{11}} + \frac{7}{2^{11}} = \frac{7}{2^8} = \frac{7}{256} \quad \dots\dots ⑥(\text{答})$$

である.

- (3) 点 P が, 時刻 1, 時刻 2, $\dots$, 時刻 7 のいずれかに (4, 2) にあるのは, 時刻 6 のときに限る. さらに, 点 P が, 時刻 8 に双曲線②上にあるのは, 点 P が (4, 0) または (5, 3) にあるときに限る.

点 P が, 時刻 6 に (4, 2) にあり, かつ, 時刻 8 に (4, 0) にあるような順列は, R を 4 個, U を 2 個並べた順列のうしろに, D を 2 個並べてできる順列であるから,

$${}_6C_2 \times 1 = 15 \text{ 通り}$$

ある.

点 P が, 時刻 6 に (4, 2) にあり, かつ, 時刻 8 に (5, 3) にあるような順列は, R を 4 個, U を 2 個並べた順列のうしろに, R を 1 個, U を 1 個並べてできる順列であるから,

$${}_6C_2 \times 2 = 30 \text{ 通り}$$

ある.

よって, 点 P が, 時刻 6 に (4, 2) にあり, かつ, 時刻 8 に双曲線②上にある確率は,

$$\frac{15 + 30}{2^{16}} = \frac{45}{2^{16}} \quad \dots\dots ⑦$$

である.

したがって, 求める条件付き確率は, ⑦ $\div$ ⑥ より,

$$\frac{\frac{45}{2^{16}}}{\frac{7}{2^8}} = \frac{45}{7 \cdot 256} = \frac{45}{1792} \quad \dots\dots (\text{答})$$

である.

5

(1) C について

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t) \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)$$

である. $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ に注意すると, $\frac{dx}{dt} = 0$ となる t は $t = \frac{\pi}{4}$ であり, $t = \frac{\pi}{4}$ のとき速度ベクトルは

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (0, \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4}}) \neq \vec{0}$$

である. $t = \frac{\pi}{4}$ のときの点 (x, y) を $N\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}\right)$ とおくと, l は N における C の接線だから,

l の方程式は

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}} \quad \dots \quad (\text{答})$$

である.

(2) 部分積分により

$$\begin{cases} I = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t - \int \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cdot (-\beta \sin \beta t) dt \\ J = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cdot \sin \beta t - \int \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cdot \beta \cos \beta t dt \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases} I = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{\beta}{\alpha} J \\ J = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \sin \beta t - \frac{\beta}{\alpha} I \end{cases}$$

である. これにより

$$\begin{cases} I = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \cos \beta t + \beta \sin \beta t) + C_1 \\ J = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \sin \beta t - \beta \cos \beta t) + C_2 \end{cases} \quad (C_1, C_2 \text{ は積分定数}) \quad \dots \quad (\text{答})$$

が得られる.

(3) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}$ とおく.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$		+	0	-	
$\frac{dy}{dt}$		+	+	+	
(x, y)	(1, 0)	$\nearrow$	(a, a)	$\nwarrow$	$(0, e^{\frac{\pi}{2}})$

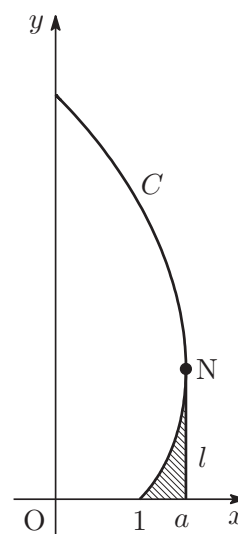
D は図の斜線部分 (境界を含む) となるので

$$V = \int_1^a \pi y^2 dx$$

である.

①より $dx = e^t(\cos t - \sin t) dt$ である. よって

$$\begin{array}{c|c} x & 1 \rightarrow a \\ \hline t & 0 \rightarrow \pi/4 \end{array}$$



$$V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi (e^t \sin t)^2 \cdot e^t (\cos t - \sin t) dt$$

である。ゆえに

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3t} \sin^2 t (\cos t - \sin t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3t} \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} \cdot (\cos t - \sin t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3t} \left(\frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos 2t \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t \sin t \right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3t} \left(\frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\cos 3t + \cos t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\sin 3t - \sin t) \right) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{4} e^{3t} \cos t - \frac{3}{4} e^{3t} \sin t - \frac{1}{4} e^{3t} \cos 3t + \frac{1}{4} e^{3t} \sin 3t \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{e^{3t}}{10} (3 \cos t + \sin t) - \frac{3}{4} \cdot \frac{e^{3t}}{10} (3 \sin t - \cos t) - \frac{1}{4} \cdot \frac{e^{3t}}{18} (3 \cos 3t + 3 \sin 3t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \cdot \frac{e^{3t}}{18} (3 \sin 3t - 3 \cos 3t) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left[e^{3t} \left(\frac{3}{20} \cos t - \frac{1}{5} \sin t - \frac{1}{12} \cos 3t \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{30\sqrt{2}} e^{\frac{3\pi}{4}} - \frac{1}{15} \end{aligned}$$

となる。よって

$$V = \pi \left(\frac{1}{30\sqrt{2}} e^{\frac{3\pi}{4}} - \frac{1}{15} \right) \quad \dots (\text{答})$$

である。

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \overrightarrow{OQ} = b\overrightarrow{OB} & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ a|\overrightarrow{OA}|^2 = b|\overrightarrow{OB}|^2 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

球面と直線の共有点の個数は高々2であることに注意する. A, B, P は S 上の相異なる3点なので, A, B, P が同一直線上にあることはない. よって, A, B, P を通る平面がただ1つ存在し, それが α である. また, α と S の共通部分は円であり, それを K とする.

(1) ①より相異なる3点 O, A, P は同一直線上にあるので, O も α 上にある. よって, ②より Q は α 上の相異なる2点 O, B を結ぶ直線上にあるから, Q も α 上にある. ■

(2) A, B, O, P は相異なる4点であることに注意すると, ①より $a \neq 0$ であり, これと③より $b \neq 0$ で, a と b は同符号である. また, B, C, D は S 上の相異なる3点であり, Q は直線 CD 上の点であるから, B と Q は相異なる. これらのことと①, ②より, O は2つの線分 AP と BQ の交点, または AP の延長と BQ の延長の交点である. さらに, ③の両辺の絶対値をとり, ①, ②を用いると

$$\begin{aligned} |a||\overrightarrow{OA}|^2 &= |b||\overrightarrow{OB}|^2 \iff |\overrightarrow{OA}||a\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}||b\overrightarrow{OB}| \\ &\iff |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OQ}| \end{aligned}$$

となるから, 方べきの定理の逆より, A, B, P, Q は同一円周上にある. よって, Q は K 上の点であるから, Q は S と直線 CD の交点である. 直線 CD 上の点で S 上にあるのは C と D だけあるから, Q は C または D に等しい. ■

