2026年度 東京科学大学 前期 数学（医歯学系）

$\boxed{1}$

題意の多面体を F とする．また，$\mathrm{OA}=a$，$\mathrm{OA}+\mathrm{AA}'=1$ より，$\mathrm{AA}'=1-a$ であることに注意する．

(1)　$a=b$ のとき，F は，底面が 1 辺の長さが a の正方形，高さが $1-a$ の直方体であるから，その体積は，

$$V=a^2(1-a)=a^2-a^3$$

である．$\mathrm{OA}>0$，$\mathrm{AA}'>0$ より $0<a<1$ であり，

$$\frac{dV}{da}=2a-3a^2=-3a\left(a-\frac{2}{3}\right)$$

であるから，V の増減は次のようになる．

a	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(1)
$\frac{dV}{da}$		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	

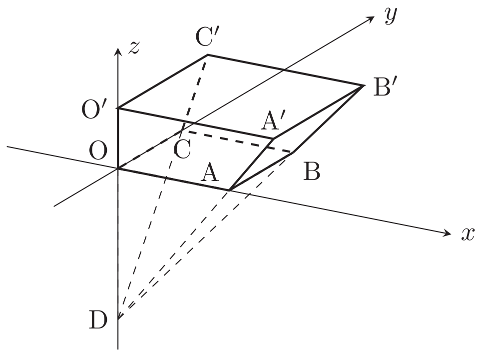
よって，V の最大値は，

$$\frac{4}{27}$$ ……(答)

である．

(2), (3)　正の定数 k について $b-a=k\mathrm{AA}'$ が成り立つとき，

$$b=a+k\mathrm{AA}'$$ ……①



と $k\mathrm{AA}'>0$ より，$a<b$ である．このとき，

$$\mathrm{O'A'}:\mathrm{OA}=\mathrm{O'C'}:\mathrm{OC}=b:a$$
$$\mathrm{O'B'}:\mathrm{OB}=\sqrt{2}b:\sqrt{2}a=b:a$$

であるから，2 平面 OABC，O′A′B′C′ が平行であること，4 点 O，O′，A，A′ が同一平面上にあること，4 点 O，O′，B，B′ が同一平面上にあること，4 点 O，O′，C，C′ が同一平面上にあることとあわせて，4 直線 OO′，AA′，BB′，CC′ は 1 点で交わる．

この交点を D とすると，F は，四角錐 D-O′A′B′C′ から四角錐 D-OABC を除いたものであり，四角錐 D-OABC の体積を V_1，四角錐 D-O′A′B′C′ の体積を V_2 とすると，

$$V=V_2-V_1$$ ……②

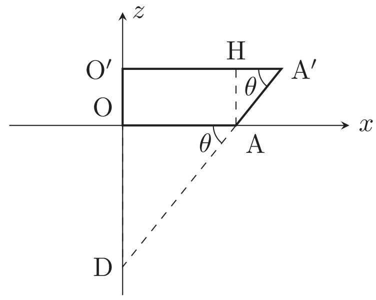
である．また，2 つの四角錐は相似であり，相似比が $a:b$ であることより，体積比は $a^3:b^3$ であるから，

$$V_2=\frac{b^3}{a^3}V_1$$

である．よって，②より，

$$V=\frac{b^3-a^3}{a^3}V_1$$ ……③

である．



V_1 を求めよう．点 A から直線 O′A′ へ下ろした垂線の足を H とし，

$\angle \mathrm{OAD} = \angle \mathrm{HA'A} = \theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，①より，

$k = \dfrac{b-a}{\mathrm{AA'}} = \dfrac{\mathrm{A'H}}{\mathrm{AA'}} = \cos\theta$ であるから，$0 < k < 1$ である．以下，この条件のもとで考える．

このとき，①より，

$$b = a + k(1-a) = (1-k)a + k \qquad \cdots\cdots ④$$

である．また，

$$\mathrm{OD} = \mathrm{OA}\tan\theta = a\tan\theta$$

であるから，

$$V_1 = \frac{1}{3}\cdot \mathrm{OA}^2 \cdot \mathrm{OD} = \frac{\tan\theta}{3}a^3 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

である．

よって，③，④，⑤より，

$$\begin{aligned} V &= \frac{\{(1-k)a+k\}^3 - a^3}{a^3}\cdot\frac{\tan\theta}{3}a^3 \\ &= \frac{\tan\theta}{3}\left[\{(1-k)a+k\}^3 - a^3\right] \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} \frac{dV}{da} &= \frac{\tan\theta}{3}\left[3(1-k)\{(1-k)a+k\}^2 - 3a^2\right] \\ &= \left[(1-k)\{(1-k)a+k\}^2 - a^2\right]\tan\theta \end{aligned} \qquad \cdots\cdots ⑥$$

である．

(2) について，$\cos\theta = k = \dfrac{1}{2}$ より $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ であるから，⑥より，

$$\frac{dV}{da} = \sqrt{3}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - a^2\right\} = -\frac{\sqrt{3}}{8}(7a^2 - 2a - 1) = -\frac{7\sqrt{3}}{8}\left(a - \frac{1+2\sqrt{2}}{7}\right)\left(a - \frac{1-2\sqrt{2}}{7}\right)$$

であり，(1) と同様に $0 < a < 1$ であるから，V の増減は次のようになる．

a	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}$	$\cdots$	(1)
$\dfrac{dV}{da}$		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，V が最大となるような a の値は，

$$a = \frac{1+2\sqrt{2}}{7} \qquad \cdots\cdots (2)(答)$$

である．

(3) について，$\dfrac{dV}{da} = f(a)$ とおく．⑥より，$f(a)$ は高々 2 次の関数であり，

$$f(0) = k^2(1-k)\tan\theta > 0 \qquad (\because\ 0 < k < 1)$$
$$f(1) = -k\tan\theta < 0$$

であるから，$0 < a < 1$ の範囲で $\dfrac{dV}{da} = f(a)$ の符号は 1 回だけ正から負へと変化する．そのような a において，V は最大となる．

よって，正の定数 k に対して，V は最大値を持つことが示された．

また，(1) より，$k = 0$ のときも V は最大値を持つ．

以上より，0 以上の定数 k に対して，V は最大値を持つことが示された．　((3)　証明終)

$\boxed{2}$

6 数の集合 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ を排反な 3 つの集合

$$A = \{1,\ 6\}, \quad B = \{2,\ 5\}, \quad C = \{3,\ 4\}$$

に分割する．すなわち，

$$A \cap B = B \cap C = C \cap A = \varnothing, \quad A \cup B \cup C = U$$

である．

(C1) より，数列 $\{a_n\}$ の各項は U の要素である．

また，(C2) より，$\{a_n\}$ の項は A の要素を 2 つとも含むことはできない．$B,\ C$ についても同様である．

(2)　(C3) より，$\{a_n\}$ の各項に含まれる数はちょうど 2 種類であるが，(C1), (C2) より，これらの 2 数は $A,\ B,\ C$ のうちのいずれか 2 つの集合からそれぞれ要素を 1 つずつ取り出すことによって得られる．よって，2 数の選び方は，

$${}_3\mathrm{C}_2 \times 2^2 = 12 \text{ (通り)}$$

である．

選ばれた 2 数 $x,\ y$ のいずれかを項とする項数 n の数列は 2^n 通りあるが，これらのうち「すべての項が x である」ものと「すべての項が y である」ものは (C3) に反するから，これらを除外する．よって，「各項の値のうち，異なるものが x と y である数列」の個数を r_n とすれば，

$$r_n = 2^n - 2$$

である．

以上より，(C1), (C2), (C3) を満たす数列 $\{a_n\}$ の総数は，

$$q_n = 12r_n = 12(2^n - 2) \qquad \cdots\text{(答)}$$

である．

(3)　(C1), (C2) を満たす数列 $\{a_n\}$ の各項のうち，異なるものがちょうど何種類あるかによって場合を分ける．

(ア)　4 種類以上の場合

U から異なる 4 数を選び出すとき，$A,\ B,\ C$ いずれかの集合の要素を 2 つとも含み，(C2) に反する．したがって，条件を満たす数列を構成することはできない．

(イ)　1 種類の場合

U の要素のうちの 1 つ x を選び，$a_k = x \ \ (1 \leqq k \leqq n)$ とすると，この数列は (C1), (C2) をともに満たす．よって，条件を満たす数列の個数は 6 である．

(ウ)　2 種類の場合

条件を満たす数列の個数は q_n である．

(エ)　3種類の場合

選ぶべき3数は $A,\ B,\ C$ の各集合から要素を1つずつ取り出すことによって得られるから，その選び方は $2^3=8$ 通りある．

選ばれた3数 $x,\ y,\ z$ のいずれかを項とする項数 n の数列は 3^n 個ある．このうち次の2つの場合は条件に反する．

「すべての項の値が等しいもの」： これは3通りある．

「$x,\ y,\ z$ のうち，ちょうど2種類しか含まないもの」： どの2数が用いられるかの決め方が ${}_3\mathrm{C}_2=3$ 通りあり，これら2数を並べてできる数列の個数は r_n である．

よって，条件を満たす数列の個数は，

$$8(3^n-3-3r_n)$$

である．

以上，(ア)〜(エ) により，(C1), (C2) を満たす数列 $\{a_n\}$ の総数 p_n は，

$$\begin{aligned} p_n &= 6+12r_n+8(3^n-3-3r_n) \\ &= 8\cdot 3^n-12r_n-18 \\ &= 8\cdot 3^n-12\cdot 2^n+6 \end{aligned} \qquad \cdots(\text{答})$$

である．

(1)　(3) の結果において $n=2,\ n=3$ とすることにより，

$$p_2=30 \qquad \cdots(\text{答})$$
$$p_3=126 \qquad \cdots(\text{答})$$

を得る．

$\boxed{3}$

(1)　$\cos\theta=\dfrac{c}{r}$ のとき，円 $x^2+(y-c)^2=r^2$ の中心 $(0,\ c)$ をC，この円と x 軸の $x\geqq 0$ の部分の共有点を A$(a,\ 0)$ とし，y 軸の負の向きの単位ベクトル $(0,\ -1)$ を $\vec{v}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\vec{v}=(a,\ -c)\cdot(0,\ -1)=c$$

より，

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\vec{v}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|\left|\vec{v}\right|}=\frac{c}{r\cdot 1}=\frac{c}{r}=\cos\theta$$

であるから，θ は $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\vec{v}$ のなす角に等しい．

下の図1により，

$$S=2\cdot\left(\frac{1}{2}r^2\cdot 2\theta-\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta\right)=r^2(2\theta-\sin 2\theta)$$ ……(答)

と表される．

(2)　下の図2により，

$$\begin{aligned}S&=2\cdot\left\{\frac{1}{2}r^2\cdot 2(\pi-\theta)-\frac{1}{2}r^2\sin 2(\pi-\theta)\right\}\\&=r^2\{2(\pi-\theta)-\sin 2(\pi-\theta)\}\\&=r^2(2\pi-2\theta+\sin 2\theta)\end{aligned}$$ ……(答)

と表される．

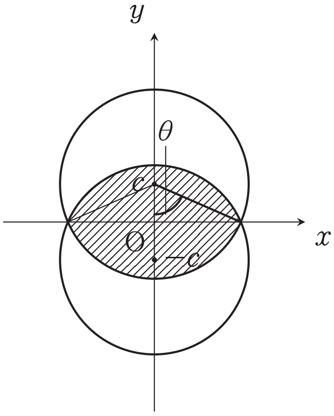


図1

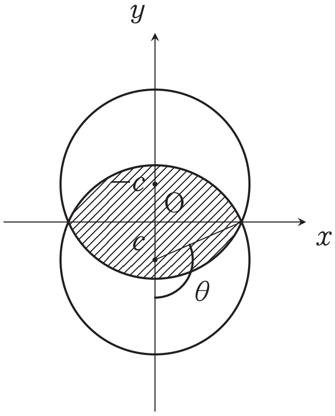


図2

(3)　$\cos\theta=\dfrac{c}{r}$ となる角について，$\theta=0$ より，(＊) は，

$$\begin{cases}x^2+(y-r)^2\leqq r^2\\x^2+(y+r)^2\leqq r^2\end{cases}$$

となる．この場合 $S=0$ であるから，(1) は $\theta=0$ でも成り立つ．一方，$\theta=\pi$ のときは，$c=-r$ より同様に $S=0$ であるから，(2) は $\theta=\pi$ でも成り立つ．そして，$|c|>r$ のときは (＊) が表す領域は存在しないため，$S=0$ である．

点 $(0,\ s,\ t)$ は C 上の点であるから，$t=as^2$ を満たしている．

平面 $z=t$ 上の領域 $D_1:x^2+(y-f(t))^2\leqq r^2$ における y 座標の最小値が $-s$ であることより，

$$f(t)-r=-s\quad \text{すなわち}\quad f(t)=r-s$$

である．また，平面 $z=t$ 上の領域 $D_2:x^2+(y-g(t))^2\leqq r^2$ における y 座標の最大値が s であることより，

$$g(t)+r=s\quad \text{すなわち}\quad g(t)=s-r$$

である．ここで，$c=f(t)=r-s$ とおくと，$g(t)=-c$ であるから，

$$D_1:x^2+(y-c)^2\leqq r^2,\ z=t$$

$$D_2:x^2+(y+c)^2\leqq r^2,\ z=t$$

である．よって，平面 $z=t$ 上の D_1 と D_2 の共通部分の面積は，(1) と (2) で求めた S にあたる．

$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ より，$-1\leqq\dfrac{c}{r}\leqq 1$ すなわち $-r\leqq c\leqq r$ であることに注意する．

(a)　$0\leqq c\leqq r$ のとき，(1) より，

$$S=r^2(2\theta-\sin 2\theta)$$

（ただし，θ は $\cos\theta=\dfrac{c}{r}$　かつ　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を満たす）

と表される．また，$s=r-c$ であるから，$t=as^2$, $0\leqq c\leqq r$ より $0\leqq t\leqq ar^2$ である．

(b)　$-r\leqq c\leqq 0$ のとき，(2) より，

$$S=r^2\{2(\pi-\theta)-\sin 2(\pi-\theta)\}$$

（ただし，θ は $\cos\theta=\dfrac{c}{r}$　かつ　$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ を満たす）

と表される．また，$s=r-c$ であるから，$t=as^2$, $-r\leqq c\leqq 0$ より $ar^2\leqq t\leqq 4ar^2$ である．

$h(\theta)=2\theta-\sin 2\theta$ とおくと，(a)，(b) より，求める体積 V は，

$$V=\int_0^{ar^2}r^2h(\theta)\,dt+\int_{ar^2}^{4ar^2}r^2h(\pi-\theta)\,dt$$

と表される．ここで，$t=as^2$ と $c=r-s$ より，

$$t=a(r-c)^2,\ \frac{dt}{dc}=2a(c-r)$$

であることと，$c=r\cos\theta$ より，$\dfrac{dc}{d\theta}=-r\sin\theta$ であることを用いると，

$$\begin{aligned}
V&=\int_0^{ar^2}r^2h(\theta)\,dt+\int_{ar^2}^{4ar^2}r^2h(\pi-\theta)\,dt\\
&=r^2\left\{\int_r^0 h(\theta)\cdot 2a(c-r)\,dc+\int_0^{-r}h(\pi-\theta)\cdot 2a(c-r)\,dc\right\}\\
&=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(\theta)\cdot 2ar(\cos\theta-1)\cdot(-r\sin\theta)\,d\theta\\
&=r^2\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(\theta)\cdot 2ar(\cos\theta-1)\cdot(-r\sin\theta)\,d\theta\right.\\
&\qquad\left.+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}h(\pi-\theta)\cdot 2ar(\cos\theta-1)\cdot(-r\sin\theta)\,d\theta\right\}
\end{aligned}$$

となる．さらに，第 2 項において $\alpha=\pi-\theta$ と置き換えると，$\dfrac{d\theta}{d\alpha}=-1$ より，

$$\begin{aligned}
V&=2ar^4\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(\theta)\cdot(1-\cos\theta)\cdot\sin\theta d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}h(\alpha)\cdot(-\cos\alpha-1)\cdot(-\sin\alpha)(-1)\,d\alpha\right\}\\
&=2ar^4\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(\theta)\cdot(1-\cos\theta)\cdot\sin\theta d\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(\theta)\cdot(1+\cos\theta)\cdot\sin\theta d\theta\right\}\\
&=4ar^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(\theta)\sin\theta d\theta\\
&=4ar^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\theta-\sin 2\theta)\sin\theta d\theta\\
&=4ar^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\theta\sin\theta-2\sin^2\theta\cos\theta)\,d\theta\\
&=4ar^4\Big[-2\theta\cos\theta+2\sin\theta-\frac{2}{3}\sin^3\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\frac{16}{3}ar^4
\end{aligned}$$

……(答)

と表される．

(4)　$a+r=1$ のとき，$a>0$ かつ $r>0$ より $0<r<1$ である．一方，V を r のみで表すと，

$$V=\frac{16}{3}r^4(1-r)$$

となる．よって，

$$\frac{dV}{dr} = \frac{16}{3}\left(4r^3 - 5r^4\right) = \frac{16}{3}r^3(4-5r)$$

より，$0 < r < 1$ における増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{4}{5}$	$\cdots$	(1)
V		$+$	0	$-$	
$\frac{dV}{dr}$		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって，V を最大とする a，r の値は，

$$a = \frac{1}{5},\ r = \frac{4}{5} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．