# 2026年度 東京科学大学 前期 数学（理工学系）

1

（1）　$x=a+b\sqrt{n}$ のとき，$x-a=b\sqrt{n}$ より

$$(x-a)^2=b^2n \quad すなわち \quad x^2-2ax+a^2-b^2n=0$$

が成り立つので

$$x^2+px+q=0 \qquad \cdots\cdots①$$

を満たす有理数 $p$，$q$ の値は

$$p=-2a,\ q=a^2-b^2n \qquad \cdots\cdots（答）$$

である．

次に，上で求めた $p$，$q$ に対し，$(p',\ q')\neq(p,\ q)$ である有理数 $p'$，$q'$ で

$$x^2+p'x+q'=0 \qquad \cdots\cdots②$$

が成り立つと仮定する．①, ② を辺ごとに引くと

$$(p-p')x+q-q'=0$$

より

$$(p-p')x=q'-q \qquad \cdots\cdots③$$

が成り立つ．ここで，$p\neq p'$ とすると

$$x=\frac{q'-q}{p-p'}$$

となり，$p$，$p'$，$q$，$q'$ は有理数であるから，$x$ は有理数となり，無理数であることに反する．よって，$p=p'$ であり，このとき ③ より $q=q'$ である．したがって，$(p, q)\neq(p', q')$ に矛盾するので，$x^2+px+q=0$ が成り立つような有理数 $p$，$q$ の組はただ一つに限る．（証明終わり）

（2）　$x=a+b\sqrt[3]{n}$ のとき，$x-a=b\sqrt[3]{n}$ より

$$(x-a)^3=b^3n \quad すなわち \quad x^3-3ax^2+3a^2x-a^3-b^3n=0$$

が成り立つので，

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

を満たす有理数 $p$，$q$，$r$ の値は

$$p=-3a,\ q=3a^2,\ r=-a^3-b^3n$$

である．

次に，$x=a+b\sqrt[3]{n}$ において，$a$，$b$ は有理数であり，$x$ は無理数である．よって，$b\sqrt[3]{n}$ は無理数であるから，$b\neq0$ かつ $\sqrt[3]{n}$ は無理数である．よって，$t=\dfrac{x-a}{b}=\sqrt[3]{n}$ とおくと，これは無理数である．一方

$$dt^2+et+f=0 \qquad \cdots\cdots④$$

が成り立つ有理数 $d$，$e$，$f$ の組が存在すると仮定する．④ の両辺を $t$ 倍し，$t^3=n$ も用いて

$$et^2+ft+dn=0 \qquad \cdots\cdots⑤$$

が成り立ち，④, ⑤ より $t^2$ を消去すると

$$(e^2-df)t=d^2n-ef$$

となる．ここで，$t$ は無理数であるから，(1) の証明と同様にして

$$e^2-df=0 \qquad \cdots\cdots⑥$$

かつ

$$d^2n-ef=0 \qquad \cdots\cdots⑦$$

である．ここで，$d\neq0$ とすると，⑥, ⑦ より $f$ を消去して

$$d^3n=e^3 \quad すなわち \quad \frac{e}{d}=\sqrt[3]{n}=t$$

となり，$d, e$ は有理数であるから，$t$ は有理数となり，$t$ が無理数であることに反する．よって，$d=0$ であり，④, ⑥ と合わせて $e=f=0$ である．

よって，$t=\dfrac{x-a}{b}=\sqrt[3]{n}$ のとき，$dt^2+et+f=0$ ならば $d=e=f=0$ である．　$\cdots$（＊）

有理数 $u, v, w$ について，$t^3+ut^2+vt+w=0$ ……⑧ が成り立つとき，⑧ は

$$ut^2+vt+(w+n)=0$$

と書き直せるので,（＊）より $u=v=0$，$w=-n$ に限られる．これらを ⑧ に代入して

$$\left(\frac{x-a}{b}\right)^3-n=0 \quad \text{すなわち} \quad x^3-3ax^2+3a^2x-a^3-b^3n=0$$

となるので，$x$ が $x^3+px^2+qx+r=0$ を満たすような有理数 $p$，$q$，$r$ の組は，上で求めたものに限られる．

（証明終わり）

（補足）

本問では次のように,（1),（2）ともに先に命題の証明をあらかじめ行っておくと，条件を満たす有理数の組と，それがただ一つに限ることが同時に示せる．

（1） $A$，$B$ が有理数，$M$ が無理数のとき

$$A+BM=0 \quad \text{ならば} \quad A=B=0$$

が成り立つ．

（証明） $A+BM=0$ が成り立つとき，$B\fallingdotseq 0$ とすると，$M=-\dfrac{A}{B}$ と変形できるが，左辺は無理数，右辺は有理数であるから，この式は成り立たない．

よって，$B=0$ であり，$A=0$ である．

（証明終わり）

$x=a+b\sqrt{n}$ において，$a$，$b$ は有理数であり，$x$ は無理数である．よって，$b\sqrt{n}$ は無理数であるから，$b\fallingdotseq 0$ かつ $\sqrt{n}$ は無理数である．

$$x^2+px+q=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(a+b\sqrt{n}\right)^2+p\left(a+b\sqrt{n}\right)+q=0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (a^2+b^2n+ap+q)+(2ab+bp)\sqrt{n}=0$$

であり，これは，上で示した命題により，

$$\begin{cases} a^2+b^2n+ap+q=0 \\ 2ab+bp=0 \end{cases}$$

と同値である．よって，$b\fallingdotseq 0$ より

$$\begin{cases} p=-2a \\ q=a^2-b^2n \end{cases}$$

であり，有理数 $p$，$q$ の組はこの一組に限る．

（証明終わり）

（2） $A$，$B$，$C$ が有理数，$N$ が正の整数，$\sqrt[3]{N}$ が無理数のとき

$$A+B\sqrt[3]{N}+C\sqrt[3]{N^2}=0 \quad \text{ならば} \quad A=B=C=0$$

が成り立つ．

（証明） $A+B\sqrt[3]{N}+C\sqrt[3]{N^2}=0$ ……（☆）が成り立つとき

(i) $C=0$ とすると，$A+B\sqrt[3]{N}=0$ となるので,（1）で示したことにより $A=B=0$ である．

(ii) $C\fallingdotseq 0$ のとき,（☆）の両辺に $\sqrt[3]{N}$ をかけて

$$CN+A\sqrt[3]{N}+B\sqrt[3]{N^2}=0$$

である．これと（☆）より，$\sqrt[3]{N^2}$ を消去すると

$$(A-C^2N)+(B^2-AC)\sqrt[3]{N}=0$$

となり,（1）で示したことと $C\fallingdotseq 0$ により

$$\begin{cases} AB-C^2N=0 \\ B^2-AC=0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} AB=C^2N \\ A=\dfrac{B^2}{C} \end{cases}$$

である．したがって，

$$C^2N = \frac{B^3}{C} \qquad \text{より} \qquad \sqrt[3]{N} = \frac{B}{C}$$

と変形できるが，左辺は無理数，右辺は有理数であるから，この式は成り立たない．

よって，$C \neq 0$ となることはない．

(i)，(ii) より，$A = B = C = 0$ である．（証明終わり）

$x = a + b\sqrt[3]{n}$ において，$a$，$b$ は有理数であり，$x$ は無理数である．よって，$b\sqrt[3]{n}$ は無理数であり，$b \neq 0$ かつ $\sqrt[3]{n}$ は無理数である．

$$\begin{aligned}
& x^3 + px^2 + qx + r = 0 \\
\iff\ & \left(a + b\sqrt[3]{n}\right)^3 + p\left(a + b\sqrt[3]{n}\right)^2 + q\left(a + b\sqrt[3]{n}\right) + r = 0 \\
\iff\ & (a^3 + b^3n + a^2p + aq + r) + (3a^2b + 2abp + bq)\sqrt[3]{n} + (3ab^2 + b^2p)\sqrt[3]{n^2} = 0
\end{aligned}$$

であり，これは上で示した命題により

$$\begin{cases} a^3 + b^3n + a^2p + aq + r = 0 \\ 3a^2b + 2abp + bq = 0 \\ 3ab^2 + b^2p = 0 \end{cases}$$

と同値である．よって，$b \neq 0$ より

$$\begin{cases} p = -3a \\ q = 3a^2 \\ r = -a^3 - b^3n \end{cases}$$

であり，有理数 $p$，$q$，$r$ の組はこの一組に限る．（証明終わり）

**2**

(1)　$1 \leqq r < n$　……①のとき

$$ {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} = \frac{(n-1)!}{r!\,(n-1-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} $$

$$ = \frac{(n-1)!}{r!\,(n-r)!}\{(n-r)+r\} $$

$$ = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = {}_n\mathrm{C}_r $$

すなわち

$$ {}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} \quad \cdots\cdots ② $$

が成り立つ.

次に，$r$ を $r+1$，$n$ を $k+1$ に置き換えると，①は

$$ 1 \leqq r+1 < k+1 \qquad \therefore\ 0 \leqq r < k $$

となり，このとき②は

$$ {}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1} = {}_k\mathrm{C}_{r+1} + {}_k\mathrm{C}_r \qquad \therefore\ {}_k\mathrm{C}_r = {}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1} - {}_k\mathrm{C}_{r+1} $$

となる.

よって

$$ \sum_{k=r}^{n} {}_k\mathrm{C}_r = {}_r\mathrm{C}_r + \sum_{k=r+1}^{n} {}_k\mathrm{C}_r $$

$$ = {}_r\mathrm{C}_r + \sum_{k=r+1}^{n} \left({}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1} - {}_k\mathrm{C}_{r+1}\right) $$

$$ = {}_r\mathrm{C}_r + \left({}_{r+2}\mathrm{C}_{r+1} - {}_{r+1}\mathrm{C}_{r+1}\right) + \left({}_{r+3}\mathrm{C}_{r+1} - {}_{r+2}\mathrm{C}_{r+1}\right) + \cdots + \left({}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} - {}_n\mathrm{C}_{r+1}\right) $$

$$ = {}_r\mathrm{C}_r - {}_{r+1}\mathrm{C}_{r+1} + {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} = 1 - 1 + {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} $$

すなわち

$$ {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} = \sum_{k=r}^{n} {}_k\mathrm{C}_r \quad \cdots\cdots ③ $$

が成り立つ.

(2)　$x,\ y,\ z$ は正の整数なので，いずれも 1 以上であるから

$$ x+y+z \geqq 3 $$

であり，これと，$x+y+z<n$　すなわち　$x+y+z \leqq n-1$　より

$$ 3 \leqq x+y+z \leqq n-1 $$

である.

$x+y+z=k$ ($k$ は $3 \leqq k \leqq n-1$ をみたす整数)とおくと，これをみたす点 $(x, y, z)$ の個数は，「$k$ 個の〇を一列に並べ，そのすき間の $k-1$ か所の中から 2 か所を選んで仕切り｜を入れることで 3 つに分ける方法の数」だけあるから

$${}_{k-1}\mathrm{C}_2 \qquad \cdots\cdots④$$

である．

よって，$x+y+z<n$ をみたす点 $(x, y, z)$ の個数は，③を用いて

$$\sum_{k=3}^{n-1} {}_{k-1}\mathrm{C}_2 = \sum_{l=2}^{n-2} {}_{l}\mathrm{C}_2 = {}_{n-1}\mathrm{C}_3 = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) \qquad \cdots\cdots（答）$$

である．

**（別解）**

$w=n-(x+y+z)$ とおくと

$$x+y+z<n \iff w>0$$

であり，$x, y, z, n$ は整数なので，$w$ も整数である．

空間の点 $(x, y, z)$ が定まると，$w$ は 1 つに定まるから

$x+y+z<n$ をみたす空間の点 $(x, y, z)$ の個数

は

$x+y+z+w=n$ をみたす正の整数の組 $(x, y, z, w)$ の個数 ……Ⓐ

と一致する．

Ⓐは，「$k$ 個の〇を一列に並べ，そのすき間の $n-1$ か所の中から 3 か所を選んで仕切り｜を入れることで 4 つに分ける方法の数」に等しいから，求める点 $(x, y, z)$ の個数は

$${}_{n-1}\mathrm{C}_3 = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) \qquad \cdots\cdots（答）$$

である．

(3) 点 $(x, y, z)$ で

$$x+y+z=3n \qquad \cdots\cdots⑤$$

をみたすものの個数を $X_n$ とおくと，④で $k=3n$ として

$$X_n = {}_{3n-1}\mathrm{C}_2 = \frac{1}{2}(3n-1)(3n-2)$$

である．このうち

（ア）「$x, y, z$ の値が 3 つとも等しい」，

（イ）「$x, y, z$ のうち 2 つだけ値が等しい」，

（ウ）「$x, y, z$ の値が 3 つとも異なる」，

をみたすものの個数を順に，$A_n, B_n, C_n$ とおくと

$$X_n = A_n + B_n + C_n \qquad \cdots\cdots⑥$$

が成り立つ．

（ア）をみたすものは，$(x,\ y,\ z)=(n,\ n,\ n)$ の 1 個だけなので

$$A_n=1$$

である.

（イ）をみたすもののうち，「$x=y\neq z$」をみたすものの個数を $b_n$ とおく.

$x=y=l$ とおくと，⑤より $z=3n-2l$ となり，$l$ を定めると，$z$ は 1 つに定まる.

以下，$m$ を 2 以上の整数とする.

（ⅰ）$n=2m$ のとき

$z=6m-2l$ であり，$z\geqq 1$ かつ $l\geqq 1$ より，$1\leqq l\leqq 3m-1$ である.

このうち，$l=2m$ のときは $(x,\ y,\ z)=(2m,\ 2m,\ 2m)$ となるので，この 1 つを引いて

$$b_n=(3m-1)-1=3m-2=3\cdot\frac{n}{2}-2=\frac{3n-4}{2}$$

である.

（ⅱ）$n=2m+1$ のとき

$z=6m-2l+3$ であり，$z\geqq 1$ かつ $l\geqq 1$ より，$1\leqq l\leqq 3m+1$ である.

このうち，$l=2m+1$ のときは $(x,\ y,\ z)=(2m+1,\ 2m+1,\ 2m+1)$ となるので，この 1 つを引いて

$$b_n=(3m+1)-1=3m=3\cdot\frac{n-1}{2}=\frac{3n-3}{2}$$

である.

「$y=z\neq x$」,「$z=x\neq y$」をみたす点 $(x,\ y,\ z)$ の個数もそれぞれ $b_n$ であるから

$$B_n=3b_n=\begin{cases}\dfrac{3(3n-4)}{2} & (n\text{ が偶数のとき})\\[2mm] \dfrac{3(3n-3)}{2} & (n\text{ が奇数のとき})\end{cases}$$

である.

（ウ）をみたすもののうち「$x<y<z$」をみたすものの個数を $c_n$ とおく.

「$x<z<y$」「$y<x<z$」「$y<z<x$」「$z<x<y$」「$z<y<x$」をみたす点 $(x,\ y,\ z)$ の個数もそれぞれ $c_n$ であるから

$$C_n=6c_n$$

である.

⑥より，$C_n=X_n-A_n-B_n$ であるから，求める点 $(x,\ y,\ z)$ の個数は

$$c_n=\frac{1}{6}C_n=\frac{1}{6}(X_n-A_n-B_n)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{6}\left\{\dfrac{1}{2}(3n-1)(3n-2)-1-\dfrac{3(3n-4)}{2}\right\} & (n\text{ が偶数のとき})\\[2mm] \dfrac{1}{6}\left\{\dfrac{1}{2}(3n-1)(3n-2)-1-\dfrac{3(3n-3)}{2}\right\} & (n\text{ が奇数のとき})\end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{4}(3n^2-6n+4) & \left(n\text{ が偶数のとき}\right) \\ \dfrac{1}{4}(3n^2-6n+3) & \left(n\text{ が奇数のとき}\right) \end{cases}$$ ……（答）

である．

## 3

(1) P は AB を $1:3$ に内分する点であるから

$$\mathrm{P}\left(\frac{3}{4}a,\ \frac{b}{4}\right) \qquad \cdots\cdots (答)$$

である．

$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とおくと，$\mathrm{OQ}=\mathrm{BQ}=\mathrm{CQ}$ から

$$\begin{cases} \mathrm{OQ}^2=\mathrm{BQ}^2 \\ \mathrm{OQ}^2=\mathrm{CQ}^2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} X^2+Y^2=X^2+(Y-b)^2 \\ X^2+Y^2=\left(X-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(Y-\dfrac{b}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 2bY=b^2 \\ aX+bY-\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{b^2}{4}=0 \end{cases}$$

である．$a\neq 0$，$b\neq 0$ にも注意すると

$$X=\frac{a^2-b^2}{4a},\quad Y=\frac{b}{2}$$

である．ゆえに

$$\mathrm{Q}\left(\frac{a^2-b^2}{4a},\ \frac{b}{2}\right) \qquad \cdots\cdots (答)$$

である．

(2) R は直線 OA 上の点，すなわち $x$ 軸上の点であるから

$$\mathrm{R}(r,\ 0)$$

とおける．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\left(\frac{3}{4}a-r,\ \frac{b}{4}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\left(\frac{a^2-b^2}{4a}-r,\ \frac{b}{2}\right)$$

であるから，$\angle\mathrm{PRQ}=\dfrac{\pi}{2}$ となるための条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=0$$

$$\therefore \left(\frac{3}{4}a-r\right)\left(\frac{a^2-b^2}{4a}-r\right)+\frac{b}{4}\cdot\frac{b}{2}=0$$

$$\therefore 16ar^2-4(4a^2-b^2)r+a(3a^2-b^2)=0$$

$$\therefore (4r-a)\left\{4ar-(3a^2-b^2)\right\}=0$$

$$\therefore r=\frac{a}{4},\ \frac{3a^2-b^2}{4a}$$

である．ゆえに，R の座標は

$$\left(\frac{a}{4},\ 0\right),\ \left(\frac{3a^2-b^2}{4a},\ 0\right) \qquad \cdots\cdots (答)$$

である．

(3) $\angle\mathrm{PRQ}=\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\triangle\mathrm{PQR}\backsim\triangle\mathrm{ABO}\iff\mathrm{RP}:\mathrm{RQ}=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}$$

$$\triangle\mathrm{QPR}\backsim\triangle\mathrm{ABO}\iff\mathrm{RP}:\mathrm{RQ}=\mathrm{OB}:\mathrm{OA}$$

である.

ゆえに

$$\triangle\mathrm{PQR}\backsim\triangle\mathrm{ABO}\quad\text{または}\quad\triangle\mathrm{QPR}\backsim\triangle\mathrm{ABO}$$

$$\iff\mathrm{RP}:\mathrm{RQ}=a:b\quad\text{または}\quad\mathrm{RP}:\mathrm{RQ}=b:a\qquad\cdots\cdots①$$

である.

(i) $\mathrm{R}\left(\dfrac{a}{4},\ 0\right)$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\left(\frac{a}{2},\ \frac{b}{4}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\left(-\frac{b^2}{4a},\ \frac{b}{2}\right)$$

であるから

$$\begin{aligned}&\mathrm{RP}:\mathrm{RQ}\\&=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{4}\right)^2}:\sqrt{\left(-\frac{b^2}{4a}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{4a^2+b^2}{16}}:\sqrt{\frac{b^2(4a^2+b^2)}{16a^2}}\\&=1:\sqrt{\frac{b^2}{a^2}}\\&=a:b\end{aligned}$$

である. ゆえに, ①は成り立つ.

(ii) $\mathrm{R}\left(\dfrac{3a^2-b^2}{4a},\ 0\right)$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\left(\frac{b^2}{4a},\ \frac{b}{4}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\left(-\frac{a}{2},\ \frac{b}{2}\right)$$

であるから

$$\begin{aligned}&\mathrm{RP}:\mathrm{RQ}\\&=\sqrt{\left(\frac{b^2}{4a}\right)^2+\left(\frac{b}{4}\right)^2}:\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{b^2(a^2+b^2)}{16a^2}}:\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}\\&=\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}}:1\\&=b:2a\end{aligned}$$

である.

ゆえに，①が成り立つための条件は

$$b : 2a = a : b \quad \text{または} \quad b : 2a = b : a$$

$$\therefore\ 2a^2 = b^2 \quad \text{または} \quad 2ab = ab$$

$$\therefore\ b = \sqrt{2}a \quad \text{または} \quad ab = 0$$

である．

$a > 0$ かつ $b > 0$ であるから，$ab = 0$ は成り立たない．

また，$b = \sqrt{2}a$ となることはありうるが，このとき

$$(\text{R の } x \text{ 座標}) = \frac{3a^2 - b^2}{4a} = \frac{3a^2 - (\sqrt{2}a)^2}{4a} = \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4}$$

であるから，R の座標 $\left(\dfrac{3a^2 - b^2}{4a},\ 0\right)$ は $\left(\dfrac{a}{4},\ 0\right)$ とも書ける．

以上から，求める R は

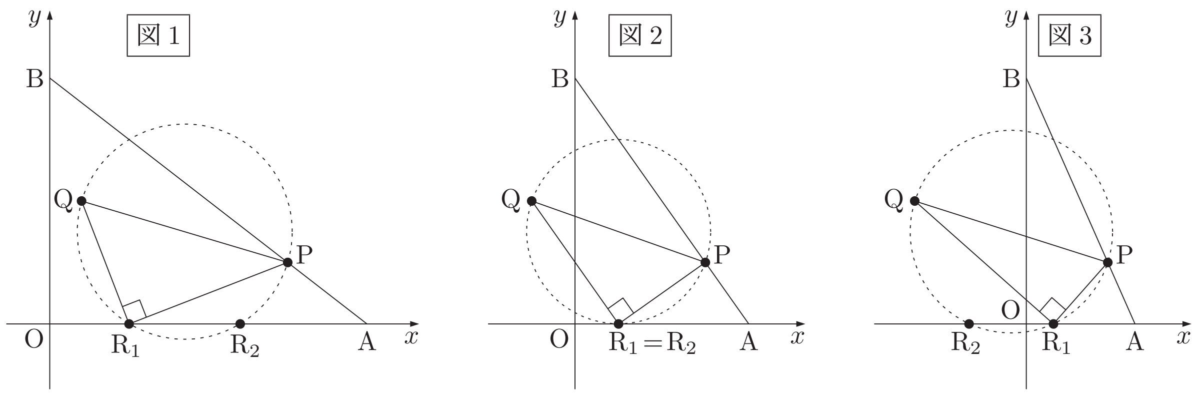
$\mathrm{R}\left(\dfrac{a}{4},\ 0\right)$ ……(答)

ですべてである．

(参考)

$\angle \mathrm{PRQ} = \dfrac{\pi}{2}$ であるから，R は「PQ を直径とする円」上にある．

以下の図では，$\mathrm{R}_1\left(\dfrac{a}{4},\ 0\right)$，$\mathrm{R}_2\left(\dfrac{3a^2 - b^2}{4a},\ 0\right)$ としている．




$b < \sqrt{2}a$ のとき，$\dfrac{a}{4} < \dfrac{3a^2 - b^2}{4a}$ であり，図 1 のようになる．

$b = \sqrt{2}a$ のとき，$\dfrac{a}{4} = \dfrac{3a^2 - b^2}{4a}$ であり，図 2 のようになる．

$b > \sqrt{2}a$ のとき，$\dfrac{a}{4} > \dfrac{3a^2 - b^2}{4a}$ であり，図 3 のようになる．

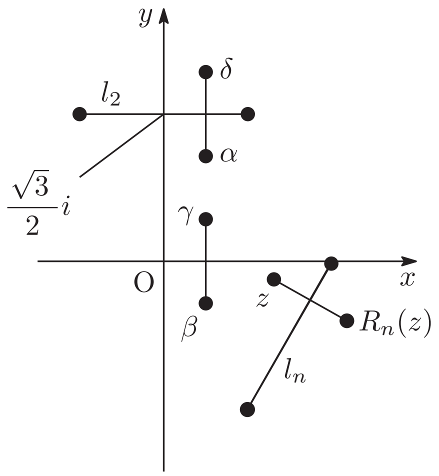
$b \neq \sqrt{2}a$ (図 1 または図 3) の場合は，$\mathrm{R} = \mathrm{R}_1$ ならば①が成り立ち，$\mathrm{R} = \mathrm{R}_2$ ならば①が成り立たない．

$b = \sqrt{2}a$ (図 2) の場合は，$\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_2$ であり，$\mathrm{R} = \mathrm{R}_1 (= \mathrm{R}_2)$ ならば①が成り立つ．

したがって，いずれの場合も①をみたすような点 R はただ 1 つであり，その座標は $\left(\dfrac{a}{4},\ 0\right)$ と表せる．

$\boxed{4}$

(1)




$p=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ とおく．$\overline{p}=p^{-1}$ に注意する．

$l_n$ を原点を中心として $-\dfrac{n-2}{3}\pi$ だけ回転すると $l_2$ となり，$l_2$ は点 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ を通り虚軸に垂直である．このことを利用して $R_n(z)$ を求める．

点 $z$ を原点を中心として $-\dfrac{n-2}{3}\pi$ だけ回転した点 $\alpha$ は $\alpha=p^{-(n-2)}z$ である．

点 $\alpha$ を $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ だけ平行移動した点 $\beta$ は $\beta=p^{-(n-2)}z-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ である．

点 $\beta$ を実軸に関して対称移動した点 $\gamma$ は $\gamma=\overline{\beta}=p^{n-2}\,\overline{z}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ である．

点 $\gamma$ を $\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ だけ平行移動した点 $\delta$ は $\delta=p^{n-2}\,\overline{z}+\sqrt{3}\,i$ である．

点 $\delta$ を原点を中心として $\dfrac{n-2}{3}\pi$ だけ回転した点が点 $R_n(z)$ だから，

$$R_n(z)=p^{n-2}(p^{n-2}\,\overline{z}+\sqrt{3}\,i)=p^{2n-4}\,\overline{z}+\sqrt{3}\,ip^{n-2}\quad \cdots\ ①$$

である．関数 $R_n(z)$ は①で与えられるから，$\theta_1$，$\theta_2$ は，

$$e(\theta_1)=p^{2n-4}\,,\quad \sqrt{3}\,e(\theta_2)=\sqrt{3}\,ip^{n-2}$$

をみたす実数，すなわち

$$\cos\theta_1+i\sin\theta_1=\cos\left(\frac{2n-4}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{2n-4}{3}\pi\right)$$

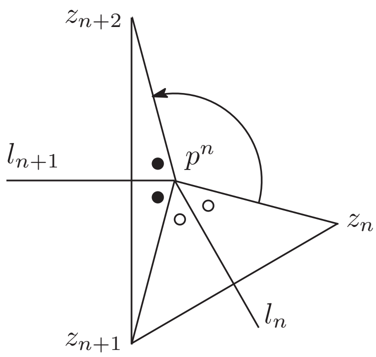
$$\cos\theta_2+i\sin\theta_2=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n-2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n-2}{3}\pi\right)$$

をみたす実数で

$$\theta_1=\frac{2n-4}{3}\pi+2k_1\pi\,,\quad \theta_2=\frac{2n-1}{6}\pi+2k_2\pi\quad (\,k_1,\ k_2\ \text{は整数})\qquad \cdots(\text{答})$$

である．

(2) 点 $z_n$ を点 $p^n$ を中心として $\dfrac{2\pi}{3}$ だけ回転すると点 $z_{n+2}$ になるから，




$$z_{n+2}-p^n=p^2(z_n-p^n)$$

である．整理すると

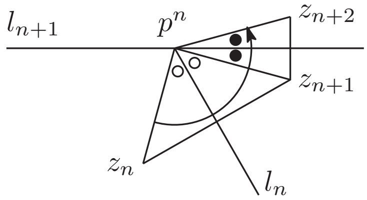
$$z_{n+2}=p^2z_n-p^{n+2}+p^n$$

となり，両辺を $p^{n+2}$ で割ると

$$\frac{z_{n+2}}{p^{n+2}}=\frac{z_n}{p^n}-(1-p^{-2})$$

となる．

$n$ が奇数のときは，$\dfrac{z_n}{p^n}=\dfrac{z_1}{p^1}-(1-p^{-2})\cdot\dfrac{n-1}{2}$ だから，




$$\begin{aligned} z_n&=\left(z_1-\frac{p-p^{-1}}{2}(n-1)\right)p^{n-1} \quad \cdots\text{②}\\ &=\left(a+bi-\frac{\sqrt{3}}{2}i(n-1)\right)\left(\cos\frac{n-1}{3}\pi+i\sin\frac{n-1}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

である．

$n$ が偶数のときは，$n-1$ は1以上の奇数だから，②より

$$z_{n-1}=\left(z_1-\frac{p-p^{-1}}{2}(n-2)\right)p^{n-2}$$

である．よって，①より

$$z_n=R_{n-1}(z_{n-1})=p^{2n-6}\,\overline{z_{n-1}}+\sqrt{3}\,ip^{n-3}=p^{2n-6}\,\overline{\left(z_1-\frac{p-p^{-1}}{2}(n-2)\right)p^{n-2}}+\sqrt{3}\,ip^{n-3}$$

となり，$p^{-1}=\overline{p}$，$p^6=1$，$p=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ を用いて整理すると

$$\begin{aligned} z_n&=p^{2n}\left(\overline{z_1}-\frac{\overline{p}-p}{2}(n-2)\right)p^{-(n-2)}+\sqrt{3}\,ip^{n+3} \qquad (\,p^6=1\text{ を用いた})\\ &=\left(\overline{z_1}-\frac{\overline{p}-p}{2}(n-2)+\sqrt{3}\,ip\right)p^{n+2}\\ &=\left(\overline{z_1}+\frac{\sqrt{3}}{2}i(n-2)+\sqrt{3}\,i\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)p^{n+2}\\ &=\left(a-bi-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}in\right)\left(\cos\frac{n+2}{3}\pi+i\sin\frac{n+2}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

となる．

以上より

$$z_n=\begin{cases}\left(a+bi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i(n-1)\right)\left(\cos\dfrac{n-1}{3}\pi+i\sin\dfrac{n-1}{3}\pi\right) & (n\text{ が奇数のとき})\\ \left(a-bi-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i+\dfrac{\sqrt{3}}{2}in\right)\left(\cos\dfrac{n+2}{3}\pi+i\sin\dfrac{n+2}{3}\pi\right) & (n\text{ が偶数のとき})\end{cases}$$

$\cdots$ (答)

である．

$\boxed{5}$

$f(x)=x^k e^{-x}$ とし

$$I_n=\int_0^{100} f(x)\sin^2(nx)dx$$

とおくと

$$I_n=\int_0^{100} f(x)\cdot\frac{1-\cos 2nx}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{100} f(x)\,dx-\frac{1}{2}\int_0^{100} f(x)\cos 2nx\,dx$$

であり

$$a_n=\int_0^{100} f(x)\cos 2nx\,dx$$

とおくと

$$I_n=\frac{1}{2}\int_0^{100} f(x)dx-\frac{1}{2}a_n$$

となる.

$$\begin{aligned}a_n&=\Big[f(x)\cdot\frac{\sin 2nx}{2n}\Big]_0^{100}-\int_0^{100} f'(x)\cdot\frac{\sin 2nx}{2n}dx\\&=f(100)\cdot\frac{\sin 200n}{2n}-\frac{1}{2n}\int_0^{100} f'(x)\sin 2nx\,dx\end{aligned}$$

であり, 任意の実数 $\theta$ に対して $|\sin\theta|\leqq 1$ であるから

$$\begin{aligned}|\,a_n\,|&\leqq\left|f(100)\cdot\frac{\sin 200n}{2n}\right|+\left|-\frac{1}{2n}\int_0^{100} f'(x)\sin 2nx\,dx\right|\\&\leqq\frac{|\,f(100)\,|}{2n}|\sin 200n\,|+\frac{1}{2n}\int_0^{100}|\,f'(x)\,||\sin 2nx\,|\,dx\\&\leqq\frac{|\,f(100)\,|}{2n}+\frac{1}{2n}\int_0^{100}|\,f'(x)\,|\,dx\end{aligned}$$

である. $|\,f(100)\,|$ と $\displaystyle\int_0^{100}|\,f'(x)\,|dx$ は $n$ によらない実数であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{|\,f(100)\,|}{2n}+\frac{1}{2n}\int_0^{100}|\,f'(x)\,|\,dx\right\}=0$$

であり, $|\,a_n\,|\geqq 0$ であるから, はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}|\,a_n\,|=0\quad \text{すなわち}\quad \lim_{n\to\infty}a_n=0$$

である. よって

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{1}{2}\int_0^{100} f(x)dx$$

であるから, $b_k=\displaystyle\int_0^{100} f(x)dx$ とおくと, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n>10$ は

$$b_k>20$$

となり, これをみたす最小の $k$ を求める.

$b_0$ を

$$b_0=\int_0^{100} e^{-x}dx=\Big[-e^{-x}\Big]_0^{100}=1-e^{-100}$$

で定めると, $k \geqq 0$ のとき

$$\begin{aligned}b_{k+1}&=\int_0^{100} x^{k+1}e^{-x}dx=\Big[x^{k+1}\left(-e^{-x}\right)\Big]_0^{100}-\int_0^{100}(k+1)x^k\left(-e^{-x}\right)dx\\&=-100^{k+1}e^{-100}+(k+1)b_k\end{aligned}$$

であるから

$$\frac{b_{k+1}}{(k+1)!}=\frac{b_k}{k!}-\frac{100^{k+1}e^{-100}}{(k+1)!}$$

である. よって, $k \geqq 1$ のとき

$$\frac{b_k}{k!}=\frac{b_0}{0!}-\sum_{l=0}^{k-1}\frac{100^{l+1}e^{-100}}{(l+1)!}=1-e^{-100}-\sum_{m=1}^{k}\frac{100^m e^{-100}}{m!}=1-\sum_{m=0}^{k}\frac{100^m e^{-100}}{m!}$$

であるから

$$b_k=k!\left(1-\sum_{m=0}^{k}\frac{100^m}{e^{100}m!}\right)$$

である.

- $1 \leqq k \leqq 3$ のとき

  $$b_k=k!\left(1-\sum_{m=0}^{k}\frac{100^m}{e^{100}m!}\right)<k!(1-0)\leqq 3!<20$$

  である.

- $k=4$ のとき, $e>2$ より

  $$\begin{aligned}b_4&=4!\left(1-\sum_{m=0}^{4}\frac{100^m}{e^{100}m!}\right)>24\left(1-\sum_{m=0}^{4}\frac{100^m}{2^{100}m!}\right)>24\left(1-\sum_{m=0}^{4}\frac{100^4}{2^{100}0!}\right)\\&=24\left(1-\frac{10^8}{2^{100}}\cdot 5\right)=24-\frac{120\cdot 10^8}{1024^{10}}>24-\frac{1000\cdot 10^8}{1000^{10}}=24-\frac{10^{11}}{10^{30}}\\&>24-1>20\end{aligned}$$

  である.

以上より, $b_k>20$ となる最小の $k$ は

$k=4$ ……(答)

である.