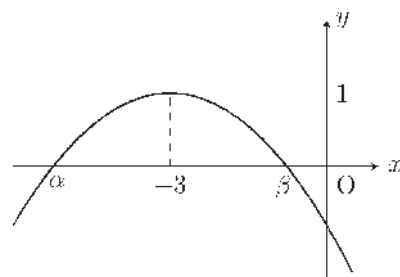


2026年度 東京大学 前期 数学 文系

文 科 第 1 問

$k > 0$ と $\alpha < \beta$ に注意すると、右図より、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} k(x - \alpha)(\beta - x) dx \\ &= \frac{k}{6}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots ①$$



$$y = k(x - \alpha)(\beta - x)$$

で与えられる.

ここで、放物線 $C : y = k(x - \alpha)(\beta - x)$ の頂点について、 x 座標が -3 であることから、

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = -3$$

であり、 y 座標が 1 であることから、

$$k \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha \right) \left(\beta - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 1, \text{ すなわち, } k \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right)^2 = 1$$

が成立し、これらより、

$$\alpha + \beta = -6 \quad \dots\dots\dots ②$$

$$(\beta - \alpha)^2 = \frac{4}{k} \quad \dots\dots\dots ③$$

である.

また、放物線 $C : y = k(x - \alpha)(\beta - x)$ と y 軸との交点の y 座標は $-k\alpha\beta$ であり、これが $-2 \leq y \leq 0$ の範囲にあることから、

$$-2 \leq -k\alpha\beta \leq 0 \quad \therefore 0 \leq \alpha\beta \leq \frac{2}{k} \quad \dots\dots\dots ④$$

さて、③を変形して②を用いると、

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta &= \frac{4}{k} \\ \therefore (-6)^2 - 4\alpha\beta &= \frac{4}{k} \quad \therefore \alpha\beta = 9 - \frac{1}{k} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots ⑤$$

この⑤を④に代入すると、

$$0 \leq 9 - \frac{1}{k} \leq \frac{2}{k}, \text{ すなわち, } 3 \leq \frac{1}{k} \leq 9 \quad \dots\dots\dots ⑥$$

となり、これが $\frac{1}{k}$ のとり得る値の範囲である.

一方、③を①に代入すると、

$$S = \frac{k}{6} \left(\sqrt{\frac{4}{k}} \right)^3 = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{k}} \quad \dots\dots\dots ⑦$$

と表されるので、⑥のもとで⑦の値域を求め、

$$\frac{4}{3} \sqrt{3} \leq S \leq \frac{4}{3} \sqrt{9}, \text{ すなわち, } \frac{4}{\sqrt{3}} \leq S \leq 4$$

が S のとりうる値の範囲である.

文科 第2問

選んだ相異なる3点が三角形の3頂点となることの余事象は

(*)「3点が同一直線上にある」

であり、それは次の(ア)、(イ)、(ウ)のいずれかの場合である。

(ア)「3点が y 軸と平行な直線上にある」

(イ)「3点が x 軸と平行な直線上にある」

(ウ)「3点が座標軸と平行でない直線上にある」

(1) $n = 5$ のとき、相異なる3点の選び方は ${}_{15}C_3 = 455$ 通りあり、これらは同様に確からしい。

このうち、(*)を満たす3点の選び方を求める。

(ア)のときは、直線 $x = a$ ($a = 1, 2, 3$) 上の5点 $(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (a, 5)$ から3点を選ぶときで、選び方は全部で ${}_5C_3 \cdot 3 = 30$ 通りある。

(イ)のときは、直線 $y = b$ ($b = 1, 2, 3, 4, 5$) 上の3点 $(1, b), (2, b), (3, b)$ から3点を選ぶときで、選び方は全部で ${}_3C_3 \cdot 5 = 5$ 通りある。

(ウ)のとき。

直線の傾きが正である場合。

- ・ 傾きが1である同一直線上の3点 $(1, c), (2, c+1), (3, c+2)$ (c は整数)を考える。
 y 座標に注目すると、

$$c \geq 1 \quad \text{かつ} \quad c+2 \leq 5$$

より、 c の範囲は $1 \leq c \leq 3$ であるから、3点の選び方は全部で ${}_3C_3 \cdot 3 = 3$ 通りある。

- ・ 傾きが2である同一直線上の3点 $(1, d), (2, d+2), (3, d+4)$ (d は整数)を考える。
 y 座標に注目すると、

$$d \geq 1 \quad \text{かつ} \quad d+4 \leq 5$$

より、 $d = 1$ であるから、3点の選び方は全部で ${}_3C_3 \cdot 1 = 1$ 通りである。

傾きが正である直線上の3点の選び方は他になく、合計 $3 + 1 = 4$ 通りである。

傾きが負である場合は、上の場合と直線 $x = 2$ に関して対称な場合であると考えて、同じく4通りあるから、選び方は全部で

$$4 \cdot 2 = 8 \text{ 通り}$$

ある。

以上より、(*)を満たす3点の選び方は

$$30 + 5 + 8 = 43 \text{ 通り}$$

あるので、求める確率は

$$p_5 = 1 - \frac{43}{455} = \frac{412}{455}$$

(2) $n = 2m$ のとき、相異なる 3 点の選び方は ${}_{6m}C_3 = 2m(6m-1)(3m-1)$ 通りあり、これらは同様に確からしい。

このうち、(*) を満たす 3 点の選び方を求める。

(ア) のときは、直線 $x = a$ ($a = 1, 2, 3$) 上の $2m$ 個の点 $(a, 1), (a, 2), \dots, (a, 2m)$ から 3 点を選ぶときで、選び方は全部で ${}_{2m}C_3 \cdot 3 = 2m(2m-1)(m-1)$ 通りある。

(イ) のときは、直線 $y = b$ ($b = 1, 2, \dots, 2m$) 上の 3 点 $(1, b), (2, b), (3, b)$ から 3 点を選ぶときで、選び方は全部で ${}_3C_3 \cdot 2m = 2m$ 通りある。

(ウ) のとき。

傾きが k (k は正の整数) である同一直線上の 3 点 $(1, l), (2, k+l), (3, 2k+l)$

(l は整数) を考える。 y 座標に注目すると

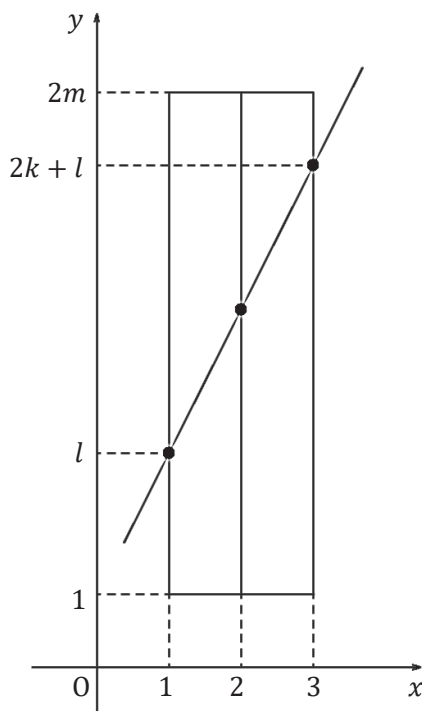
$$l \geq 1 \quad \text{かつ} \quad 2k+l \leq 2m$$

より、 l の範囲は $1 \leq l \leq 2m-2k$ であり、すると k の範囲は $1 \leq 2m-2k$ かつ $k \geq 1$ より、 $1 \leq k \leq m-1$ である。

よって、傾きが正である同一直線上の 3 点の選び方は

$$\sum_{k=1}^{m-1} {}_3C_3 \cdot (2m-2k) = 2 \sum_{k=1}^{m-1} (m-k) = 2 \cdot \frac{(m-1)+1}{2} \cdot (m-1) = m(m-1) \text{ 通り}$$

ある。



傾きが $-k$ の場合は、上の場合と直線 $x = 2$ に関して対称な場合であると考えて、同じく $m(m-1)$ 通りあるから、選び方は全部で

$$2m(m-1) \text{ 通り}$$

ある。

以上より, (＊) を満たす 3 点の選び方は

$$2m(2m-1)(m-1) + 2m + 2m(m-1) = 2m(2m^2 - 2m + 1) \text{ 通り}$$

あるので, 求める確率は

$$p_{2m} = 1 - \frac{2m(2m^2 - 2m + 1)}{2m(6m-1)(3m-1)} = 1 - \frac{2m^2 - 2m + 1}{(6m-1)(3m-1)} = \frac{m(16m-7)}{(6m-1)(3m-1)}$$

文科第3問

- (1) まず、 $4 \leq x \leq 5$ において、 $f(x) > g(x)$ であることを示す。これは、 $g(x)$ の定義式より、 $4 \leq x \leq 5$ において、 $g(x) = x - 4$ であるから、 $4 \leq x \leq 5$ において、 $f(x) - (x - 4) > 0$ が成り立つことを示せばよい。 $f(x) - (x - 4)$ を変形すると、

$$f(x) - (x - 4) = \frac{a}{8}x^2 - \left(\frac{a}{4} + 1\right)x + \frac{a}{8} + 1 + \frac{2}{a} = \frac{a}{8} \left\{ x - \left(1 + \frac{4}{a}\right) \right\}^2 \quad \dots\dots ①$$

となる。 $0 < a < 1$ より、 $1 + \frac{4}{a} > 1 + 4 = 5$ であるから、 $4 \leq x \leq 5$ において、

$$f(x) - (x - 4) > 0$$

である。

次に、 $x > 5$ において、 $f(x) > g(x)$ であることを示す。いま、 $f(x)$ は $x > 5$ において単調増加であり、

$$f(5) = 2a + \frac{2}{a} - 3 \geq 2\sqrt{2a \cdot \frac{2}{a}} - 3 \geq 1$$

であるから、 $g(x) \leq 1$ とあわせて、

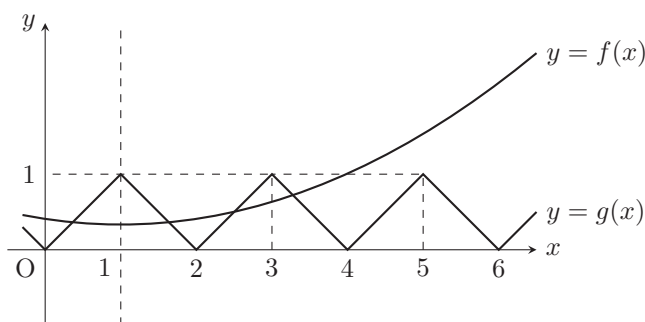
$$f(x) > f(5) \geq 1 \geq g(x) \quad \text{すなわち} \quad f(x) > g(x)$$

である。

よって、 $x \geq 4$ において、 $f(x) > g(x)$ である。

(証明終)

(2)



$\frac{1}{2} < a < \frac{2}{3}$ のとき、

$$0 < f(1) = \frac{2}{a} - 3 < 1$$

である。また、曲線 $y = f(x)$ は、 $x = 1$ に関して対称であるから、

$$f(0) = f(2) = \frac{a}{8} + \frac{2}{a} - 3 > \frac{a}{8} + \frac{2}{\frac{2}{3}} - 3 = \frac{a}{8} > 0$$

である。これらと、 $0 \leq x \leq 1$ で $f(x)$ は減少し、 $g(x)$ は増加すること、および、 $1 \leq x \leq 2$ で $f(x)$ は増加し、 $g(x)$ は減少することにより、 $0 \leq x \leq 2$ においては、 a の値によらず共有点は2個である。

また、(1)より、 $x \geq 4$ の範囲に共有点は存在しない。あとは、 $2 < x < 4$ の範囲の共有点の個数を考えればよい。

まず $2 < x \leq 3$ を考える。 $F(x) = f(x) - g(x)$ とおく。 $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフの共有点の個数は、 $f(x) - g(x) = 0$ の実数解の個数、すなわち $F(x) = 0$ の実数解の個数であり、これは $y = F(x)$ のグラフと x 軸との共有点の個数である。 $2 < x \leq 3$ において、 $g(x) = x - 2$ であるから、①を用いると、

$$F(x) = \frac{a}{8} \left\{ x - \left(1 + \frac{4}{a}\right) \right\}^2 - 2$$

であり、 $y = F(x)$ のグラフの軸は $x = 1 + \frac{4}{a} > 1 + 6 = 7$ である。また、 $F(2) = f(2) - g(2) = f(2) > 0$ であるから、

$$\begin{cases} F(3) > 0 \text{ のとき} & 2 < x \leq 3 \text{ の範囲の共有点は } 0 \text{ 個} \\ F(3) \leq 0 \text{ のとき} & 2 < x \leq 3 \text{ の範囲の共有点は } 1 \text{ 個} \end{cases}$$

である。いま,

$$F(3) = \frac{a}{2} + \frac{2}{a} - 3 - (3 - 2) = \frac{a}{2} + \frac{2}{a} - 4 = \frac{a^2 - 8a + 4}{2a}$$

より,

$$\begin{cases} F(3) > 0 & \iff a < 4 - 2\sqrt{3} \text{ または } 4 + 2\sqrt{3} < a \\ F(3) = 0 & \iff a = 4 \pm 2\sqrt{3} \\ F(3) < 0 & \iff 4 - 2\sqrt{3} < a < 4 + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

である。 $\frac{100}{9} < 12 < \frac{49}{4}$ より, $\frac{10}{3} < 2\sqrt{3} < \frac{7}{2}$ であるから,

$$\frac{1}{2} < 4 - 2\sqrt{3} < \frac{2}{3}$$

であることに注意すると,

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < a < 4 - 2\sqrt{3} \text{ のとき} & F(3) > 0 \text{ であるから, } 2 < x \leq 3 \text{ の範囲に共有点なし} \\ a = 4 - 2\sqrt{3} \text{ のとき} & F(3) = 0 \text{ であるから, } x = 3 \text{ で 1 点のみ共有} \\ 4 - 2\sqrt{3} \leq a < \frac{2}{3} \text{ のとき} & F(3) < 0 \text{ であるから, } 2 < x < 3 \text{ で 1 点のみ共有} \end{cases}$$

となる。

$3 < x < 4$ においては, $f(x)$ は増加し, $g(x)$ は減少することと $f(4) > 0 = g(4)$ であることにより, $y = f(x)$ のグラフと $y = g(x)$ のグラフは,

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < a < 4 - 2\sqrt{3} \text{ のとき} & 3 < x < 4 \text{ の範囲に共有点なし} \\ a = 4 - 2\sqrt{3} \text{ のとき} & 3 < x < 4 \text{ の範囲に共有点なし} \\ 4 - 2\sqrt{3} < a < \frac{2}{3} \text{ のとき} & 3 < x < 4 \text{ で 1 点のみ共有} \end{cases}$$

となる。

以上より, 求める共有点の個数は,

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < a < 4 - 2\sqrt{3} \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ a = 4 - 2\sqrt{3} \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ 4 - 2\sqrt{3} < a < \frac{2}{3} \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \end{cases} \quad \dots\dots (\text{答})$$

である。

文科第4問

(1) 加法定理より,

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan\theta + \tan\frac{\pi}{3}}{1 - \tan\theta \tan\frac{\pi}{3}} = \frac{\tan\theta + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\tan\theta} \quad \dots\dots (答)$$

である.

(2) y 軸と平行であるような C の接線は存在しないことに注意する. $y = x^3 - kx$ より, $y' = 3x^2 - k$ であり, O での傾きは $-k$ である. $\tan\phi = -k$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと, 条件(*)を満たす P, Q が存在するためには, $\phi \neq \pm\frac{\pi}{6}$, すなわち $-k \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ が必要であり, このときの接線の傾きは $\tan\left(\phi \pm \frac{\pi}{3}\right)$ である. よって, P, Q の x 座標は,

$$\begin{cases} 3x^2 - k = \tan\left(\phi + \frac{\pi}{3}\right) & \dots\dots ① \\ 3x^2 - k = \tan\left(\phi - \frac{\pi}{3}\right) & \dots\dots ② \end{cases}$$

の解である. 加法定理を用いて①, ②を変形すると,

$$\begin{cases} 3x^2 - k = \frac{-k + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}k} \\ 3x^2 - k = \frac{-k - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}k} \end{cases}$$

となり, これを整理すると,

$$\begin{cases} 3x^2 = \frac{-k + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}k} + k = \frac{\sqrt{3}(k^2 + 1)}{1 + \sqrt{3}k} \\ 3x^2 = \frac{-k - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}k} + k = \frac{\sqrt{3}(k^2 + 1)}{\sqrt{3}k - 1} \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} x^2 = \frac{k^2 + 1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}k + 1)} & \dots\dots ①' \\ x^2 = \frac{k^2 + 1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}k - 1)} & \dots\dots ②' \end{cases}$$

となる.

求める k の値の範囲は, ①' を満たす 0 でない x のうちと, ②' を満たす 0 でない x のうちに, 異なるものが存在するような k の値の範囲である. ①' と②' の右辺が異なることに注意すると, 求める k の値の範囲は,

$$\begin{cases} \sqrt{3}k + 1 > 0 \\ \sqrt{3}k - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad k > \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \dots\dots (答)$$

である.

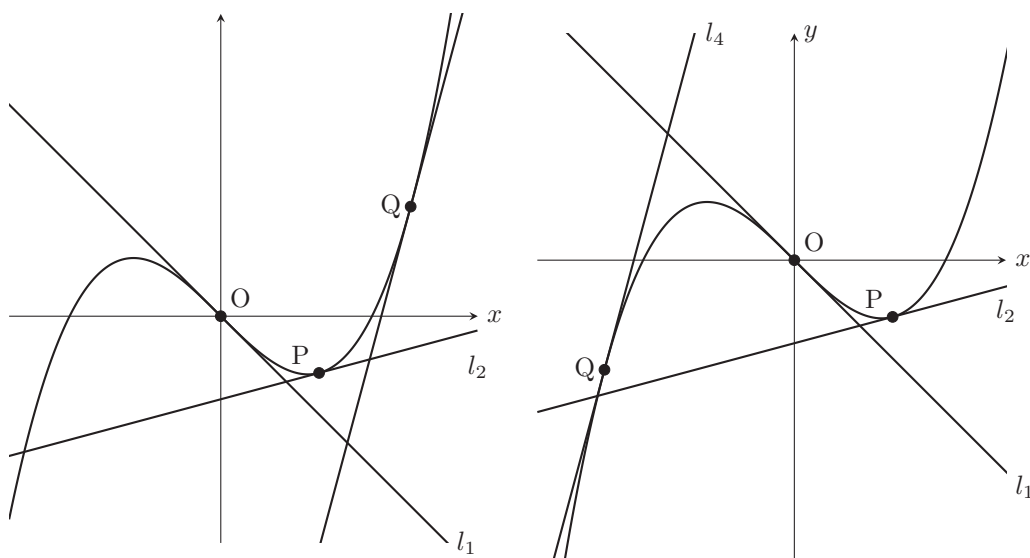
(3) P, Q の x 座標は, ①', ②' より,

$$x = \pm\sqrt{\frac{k^2 + 1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}k + 1)}} \quad \text{および} \quad x = \pm\sqrt{\frac{k^2 + 1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}k - 1)}}$$

である.

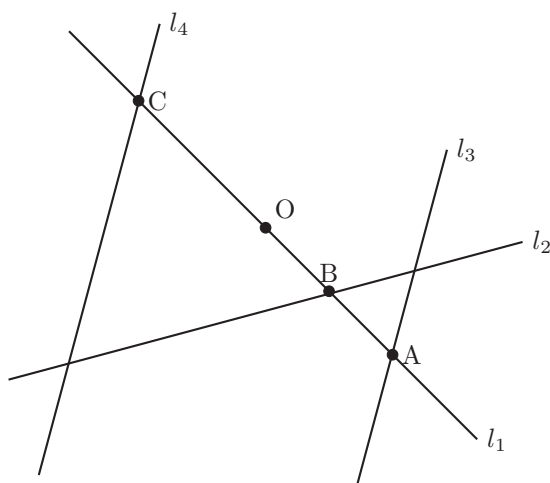
$$\alpha = \sqrt{\frac{k^2 + 1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}k + 1)}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{k^2 + 1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}k - 1)}} \quad (0 < \alpha < \beta) \quad \dots\dots ③$$

とおく. 対称性により P の x 座標を $x = \alpha$ としても一般性を失わず, Q の x 座標は $x = \beta$, または $x = -\beta$ である. Q の x 座標が $x = \beta$, $x = -\beta$ のそれぞれの場合において, グラフは次のようになる.



よって、3本の接線によって囲まれる三角形は、上図の2通りのみである。

Oでの接線を l_1 , Pでの接線を l_2 , $x = \beta$ における接線を l_3 , $x = -\beta$ における接線を l_4 とする. S が最小の三角形は l_1, l_2, l_3 が囲む三角形であり, S が最大の三角形は l_1, l_2, l_4 が囲む三角形であり, いずれも正三角形である. 曲線 C が O に関して点対称であることと, 2つの正三角形は相似であることを踏まえると, $M = 4m$ となる条件は, これら2つの正三角形の面積比が $1:4$ となることであり, これは相似比が $1:2$ となることである.



上図のように点をとる. また, 4つの接線の方程式は,

$$l_1: y = -kx, \quad l_2: y = (3\alpha^2 - k)x - 2\alpha^3, \quad l_3: y = (3\beta^2 - k)x - 2\beta^3, \quad l_4: y = (3\beta^2 - k)x + 2\beta^3$$

であるから, A, B, C の x 座標は順に,

$$-kx = (3\beta^2 - k)x - 2\beta^3, \quad -kx = (3\alpha^2 - k)x - 2\alpha^3, \quad -kx = (3\beta^2 - k)x + 2\beta^3$$

を解いて,

$$x = \frac{2\beta}{3}, \quad x = \frac{2\alpha}{3}, \quad x = -\frac{2\beta}{3}$$

である. 2つの正三角形の相似比が $1:2$ となる条件は,

$$AB:BC = 1:2$$

であり, 同一直線上の線分の長さの比は x 座標の差の大きさの比に等しいので,

$$\left(\frac{2}{3}\beta - \frac{2}{3}\alpha\right) : \left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta\right) = 1:2$$

すなわち,

$$(\beta - \alpha) : (\alpha + \beta) = 1:2$$

となることであるから,

$$\alpha : \beta = 1 : 3 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\beta}{\alpha} = 3$$

となることである. よって, ③より,

$$\sqrt{\frac{\sqrt{3}k+1}{\sqrt{3}k-1}} = 3$$

であり, 両辺を 2 乗しても同値で,

$$\sqrt{3}k+1 = 9(\sqrt{3}k-1)$$

より, 求める k の値は,

$$k = \frac{5}{4\sqrt{3}}, \quad \text{すなわち, } k = \frac{5\sqrt{3}}{12} \quad \dots\dots (答)$$

である.