理科　第 1 問

(1)　$f(\theta)=\sin\theta-\theta+\dfrac{\theta^3}{6}$ は奇関数である.

$$f'(\theta)=\cos\theta-1+\frac{\theta^2}{2}$$
$$f''(\theta)=-\sin\theta+\theta$$
$$f'''(\theta)=-\cos\theta+1$$

$0<\theta<1$ のとき $f'''(\theta)>0$ かつ $f''(0)=0$ より,

$$0<\theta<1 \text{ のとき } f''(\theta)>0 \qquad \cdots\cdots ①$$

である. つぎに, ① かつ $f'(0)=0$ より,

$$0<\theta<1 \text{ のとき } f'(\theta)>0 \qquad \cdots\cdots ②$$

である. ② より $f(\theta)$ は $0\leqq\theta\leqq1$ において単調に増加し, さらに, $f(0)=0$ より $0\leqq\theta\leqq1$ における $f(\theta)$ の値域は,

$$f(0)\leqq f(\theta)\leqq f(1)$$

すなわち,

$$0\leqq f(\theta)\leqq \sin 1-\frac{5}{6}$$

であり, $f(\theta)$ が奇関数であることから, $-1\leqq\theta\leqq1$ における $f(\theta)$ の値域は,

$$-\sin 1+\frac{5}{6}\leqq f(\theta)\leqq \sin 1-\frac{5}{6}$$

である. 以上より,

$$M=\sin 1-\frac{5}{6},\qquad m=-\sin 1+\frac{5}{6}$$

(2)　$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(\cos x-x)\,dx$ とおく.

$$I=\int_0^{2\pi}\sin(\cos x)\cos x\,dx-\int_0^{2\pi}\cos(\cos x)\sin x\,dx \qquad \cdots\cdots ③$$

ここで, $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(\cos x)\sin x\,dx=\Big[-\sin(\cos x)\Big]_0^{2\pi}=0$ であるから, ③ より,

$$I=\int_0^{2\pi}\sin(\cos x)\cos x\,dx \qquad \cdots\cdots ④$$

である.

次に, $f(\theta)=\sin\theta-\theta+\dfrac{\theta^3}{6}$ に $\theta=\cos x$ を代入して,

$$f(\cos x)=\sin(\cos x)-\cos x+\frac{1}{6}\cos^3 x$$
$$\therefore\quad \sin(\cos x)=\cos x-\frac{1}{6}\cos^3 x+f(\cos x)$$

したがって,

$$I=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 x-\frac{1}{6}\cos^4 x\right)dx+\int_0^{2\pi}f(\cos x)\cos x\,dx \qquad \cdots\cdots ⑤$$

である．

⑤ の第 1 項の積分は,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 x-\frac{1}{6}\cos^4 x\right)dx&=\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1+\cos 2x}{2}-\frac{1}{6}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2\right\}dx\\&=\int_0^{2\pi}\left(\frac{11}{24}+\frac{5}{12}\cos 2x-\frac{1}{24}\cos^2 2x\right)dx\\&=\int_0^{2\pi}\left(\frac{7}{16}+\frac{5}{12}\cos 2x-\frac{1}{48}\cos 4x\right)dx\\&=\left[\frac{7}{16}x+\frac{5}{24}\sin 2x-\frac{1}{192}\sin 4x\right]_0^{2\pi}\\&=\frac{7}{8}\pi\end{aligned}$$

である．また, ⑤ の第 2 項の積分については, $0\leqq x\leqq 2\pi$ において (1) より $f(\cos x)\cos x\geqq 0$ であるから,

$$\int_0^{2\pi}f(\cos x)\cos x\,dx\geqq 0$$

また,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi}f(\cos x)\cos x\,dx\right|&\leqq\int_0^{2\pi}|\,f(\cos x)\,||\,\cos x\,|\,dx\\&\leqq\int_0^{2\pi}M|\,\cos x\,|\,dx=M\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx\\&=4M\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=4M\end{aligned}$$

である．

したがって,

$$0\leqq\int_0^{2\pi}f(\cos x)\cos x\,dx\leqq 4M$$

であるから, ⑤ より,

$$\frac{7}{8}\pi\leqq I\leqq\frac{7}{8}\pi+4M$$

が成り立つ．

理科　第2問

選んだ相異なる3点が三角形の3頂点となることの余事象は

（＊）「3点が同一直線上にある」

であり，それは次の（ア），（イ），（ウ）のいずれかの場合である．

（ア）「3点が y 軸と平行な直線上にある」

（イ）「3点が x 軸と平行な直線上にある」

（ウ）「3点が座標軸と平行でない直線上にある」

(1)　$n=5$ のとき，相異なる 3 点の選び方は ${}_{15}\mathrm{C}_3=455$ 通りあり，これらは同様に確からしい.

このうち,（＊）を満たす3点の選び方を求める.

（ア)のときは，直線 $x=a$ $(a=1,\ 2,\ 3)$ 上の5点 $(a,\ 1)$, $(a,\ 2)$, $(a,\ 3)$, $(a,\ 4)$, $(a,\ 5)$ から3点を選ぶときで，選び方は全部で ${}_5\mathrm{C}_3\cdot 3=30$ 通りある.

（イ）のときは，直線 $y=b$ $(b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ 上の3点 $(1,\ b)$, $(2,\ b)$, $(3,\ b)$ から3点を選ぶときで，選び方は全部で ${}_3\mathrm{C}_3\cdot 5=5$ 通りある.

（ウ）のとき.

直線の傾きが正である場合.

・　傾きが1である同一直線上の3点 $(1,\ c)$, $(2,\ c+1)$, $(3,\ c+2)$ (c は整数)を考える.

y 座標に注目すると,

$$c \geqq 1 \quad \text{かつ} \quad c+2 \leqq 5$$

より，c の範囲は $1\leqq c\leqq 3$ であるから，3点の選び方は全部で ${}_3\mathrm{C}_3\cdot 3=3$ 通りある.

・　傾きが2である同一直線上の3点 $(1,\ d)$, $(2,\ d+2)$, $(3,\ d+4)$ (d は整数)を考える.

y 座標に注目すると,

$$d \geqq 1 \quad \text{かつ} \quad d+4 \leqq 5$$

より，$d=1$ であるから，3点の選び方は全部で ${}_3\mathrm{C}_3\cdot 1=1$ 通りである.

傾きが正である直線上の3点の選び方は他になく，合計 $3+1=4$ 通りである.

傾きが負である場合は，上の場合と直線 $x=2$ に関して対称な場合であると考えて，同じく4通りあるから，選び方は全部で

$$4\cdot 2=8\text{ 通り}$$

ある.

以上より，（＊）を満たす3点の選び方は

$$30+5+8=43\text{ 通り}$$

あるので，求める確率は

$$p_5=1-\frac{43}{455}=\frac{412}{455}$$

(2)　$n=2m$ のとき，相異なる 3 点の選び方は ${}_{6m}\mathrm{C}_3=2m(6m-1)(3m-1)$ 通りあり，これらは同様に確からしい.

　このうち,（＊）を満たす 3 点の選び方を求める.

（ア）のときは，直線 $x=a$ $(a=1,\ 2,\ 3)$ 上の $2m$ 個の点 $(a,\ 1),\ (a,\ 2),\ \cdots,\ (a,\ 2m)$ から 3 点を選ぶときで，選び方は全部で ${}_{2m}\mathrm{C}_3\cdot 3=2m(2m-1)(m-1)$ 通りある.

（イ）のときは，直線 $y=b$ $(b=1,\ 2,\ \cdots,\ 2m)$ 上の 3 点 $(1,\ b),\ (2,\ b),\ (3,\ b)$ から 3 点を選ぶときで，選び方は全部で ${}_3\mathrm{C}_3\cdot 2m=2m$ 通りある.

（ウ）のとき.

　傾きが k (k は正の整数) である同一直線上の 3 点 $(1,\ l),\ (2,\ k+l),\ (3,\ 2k+l)$ (l は整数)を考える．y 座標に注目すると

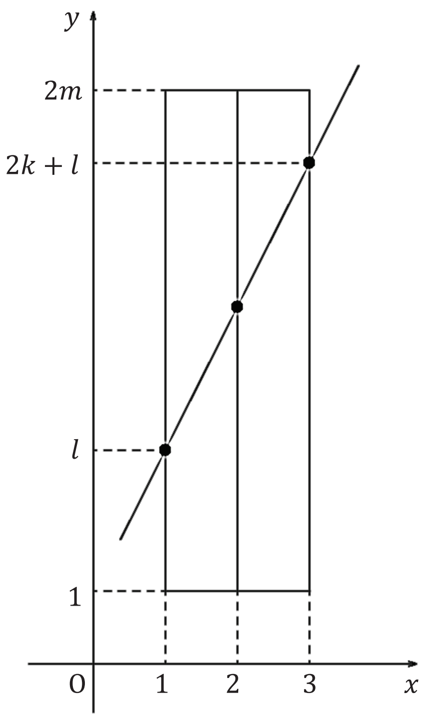
$$l\geqq 1 \quad かつ \quad 2k+l\leqq 2m$$

より，l の範囲は $1\leqq l\leqq 2m-2k$ であり，すると k の範囲は $1\leqq 2m-2k$ かつ $k\geqq 1$ より，$1\leqq k\leqq m-1$ である.

　よって，傾きが正である同一直線上の 3 点の選び方は

$$\sum_{k=1}^{m-1}{}_3\mathrm{C}_3\cdot(2m-2k)=2\sum_{k=1}^{m-1}(m-k)=2\cdot\frac{(m-1)+1}{2}\cdot(m-1)=m(m-1) \text{ 通り}$$

ある.



　傾きが $-k$ の場合は，上の場合と直線 $x=2$ に関して対称な場合であると考えて，同じく $m(m-1)$ 通りあるから，選び方は全部で

$$2m(m-1) \text{ 通り}$$

ある.

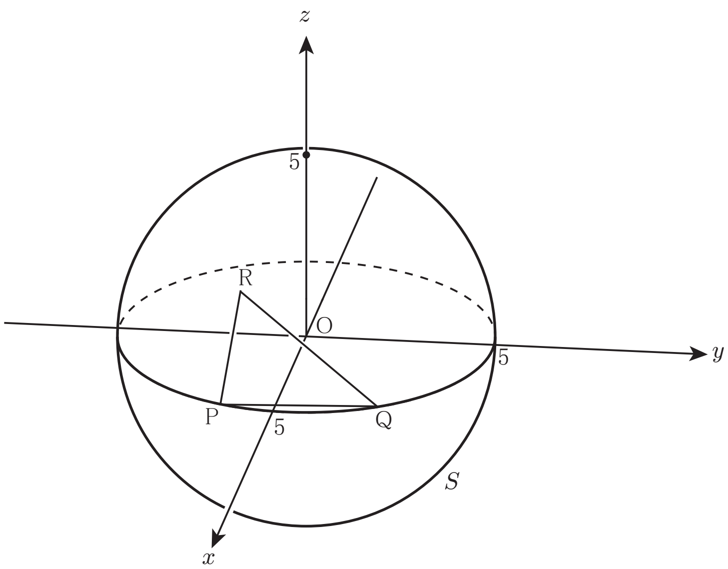
以上より，（＊）を満たす 3 点の選び方は

$$2m(2m-1)(m-1)+2m+2m(m-1)=2m(2m^2-2m+1)\text{ 通り}$$

あるので，求める確率は

$$p_{2m}=1-\frac{2m(2m^2-2m+1)}{2m(6m-1)(3m-1)}=1-\frac{2m^2-2m+1}{(6m-1)(3m-1)}=\frac{m(16m-7)}{(6m-1)(3m-1)}$$

理科　第 3 問



(1)　P$(p_1, p_2, 0)$, Q$(q_1, q_2, 0)$, R(r_1, r_2, r_3) とおく．△PQR の重心が G$(2, 0, 1)$ であることから，

$$\begin{cases} \dfrac{p_1+q_1+r_1}{3}=2 \\ \dfrac{p_2+q_2+r_2}{3}=0 \\ \dfrac{r_3}{3}=1 \end{cases}$$

すなわち，

$$\begin{cases} r_1 = 6-(p_1+q_1) & \cdots\cdots ① \\ r_2 = -(p_2+q_2) & \cdots\cdots ② \\ r_3 = 3 \end{cases}$$

が成り立つ．ここで，M$(x, y, 0)$ とおくと，

$$x=\frac{p_1+q_1}{2}, \quad y=\frac{p_2+q_2}{2} \qquad \cdots\cdots ③$$

であるから，

① は，③ より，

$$r_1 = 6-2x$$

② は，③ より，

$$r_2 = -2y$$

と表せる．点 R は球面 S 上にあるから，$r_1^2+r_2^2+r_3^2=25$ に代入して，

$$(6-2x)^2+(-2y)^2+3^2=25$$

すなわち，

$$(x-3)^2+y^2=4 \qquad \cdots\cdots ④$$

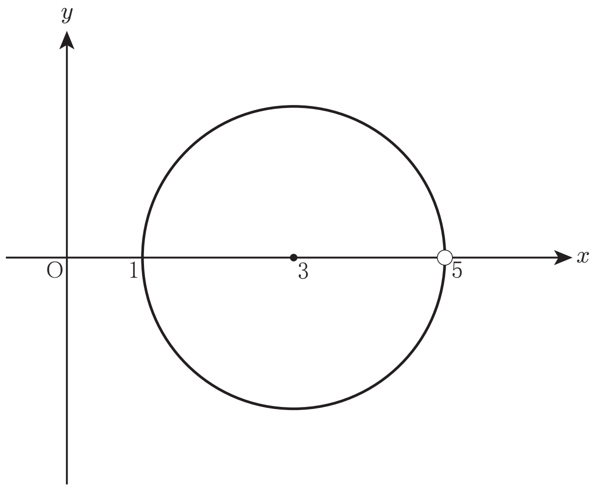
を満たす.

また, M は xy 平面上の円 $x^2+y^2=25$ 上の異なる 2 点 P, Q に対し PQ の中点であるから, M はこの円の内部, すなわち, $x^2+y^2<25$ にある.

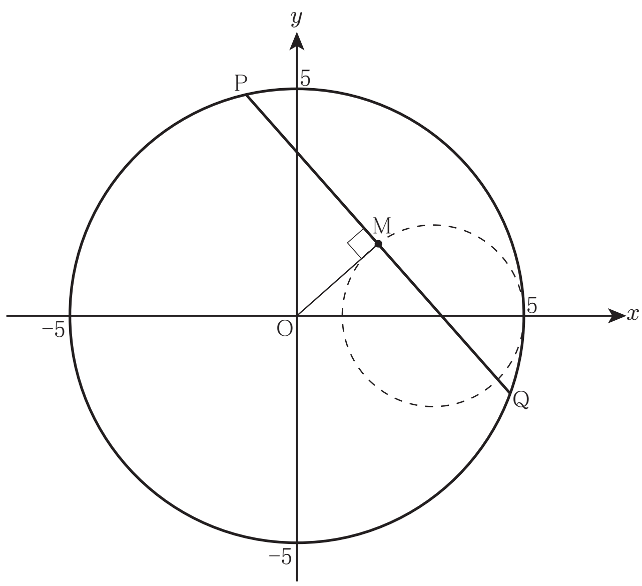
以上より, 点 M の xy 平面上での軌跡は,

$$(x-3)^2+y^2=4 \text{ かつ } (x, y) \neq (5, 0)$$

であり, これを図示すると次のようになる.



(2) xy 平面上で点 M の座標を $(3+2\cos\theta, 2\sin\theta)$ $(0<\theta<2\pi)$ とおく.



直線 PQ は $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ に垂直であり, 点 M を通るから,

$$(3+2\cos\theta)\{x-(3+2\cos\theta)\}+(2\sin\theta)(y-2\sin\theta)=0$$

すなわち,

$$(3+2\cos\theta)x+(2\sin\theta)y-13-12\cos\theta=0 \qquad \cdots\cdots ⑤$$

であり, 線分 PQ は ⑤ の $x^2+y^2 \leqq 25$ の部分である.

⑤ は,

$$2y\sin\theta+(2x-12)\cos\theta=13-3x \qquad \cdots\cdots ⑥$$

となり, ⑥ を満たす θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ に存在する条件を求めるとつぎのようになる.

⑥ は,

$$\sqrt{(2y)^2+(2x-12)^2}\sin(\theta+\alpha)=13-3x$$

(α は $A\cos\alpha=2y,\ A\sin\alpha=2x-12$ を満たす角 $(A=\sqrt{(2y)^2+(2x-12)^2})$)

となるから,

$$(2y)^2+(2x-12)^2 \geqq (13-3x)^2$$

$$5x^2-4y^2-30x \leqq -25$$

$$5(x-3)^2-4y^2 \leqq 20$$

$$\therefore \quad \frac{(x-3)^2}{4}-\frac{y^2}{5} \leqq 1 \qquad \cdots\cdots ⑦$$

である.

ここで, ⑥ が $\theta=0$ を解にもつ条件は, ⑥ に $\theta=0$ を代入して,

$$(2x-12)\cdot 1=13-3x$$

$$\therefore \quad x=5$$

このとき, $x^2+y^2 \leqq 25$ より $y=0$ であるが, $(x,y)=(5,0)$ のとき, ⑥ は,

$$-2\cos\theta=-2$$

$$\therefore \quad \cos\theta=1$$

$$\therefore \quad \theta=0$$

したがって, ⑥ が $\theta=0$ のみを解にもつ条件は, $(x,y)=(5,0)$ であるから, 線分 PQ の通過範囲は ⑦ からこの点 $(5,0)$ を除いた範囲である.

以上より, 線分 PQ の通過範囲は,

$$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{y^2}{5} \leqq 1 \text{ かつ } x^2+y^2 \leqq 25 \text{ かつ } (x,y) \neq (5,0)$$

である. ここで, 双曲線 $\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ と円 $x^2+y^2=25$ の交点の x 座標は, この 2 式から y^2 を消去して,

$$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{25-x^2}{5}=1$$

$$5(x-3)^2-4(25-x^2)=20$$

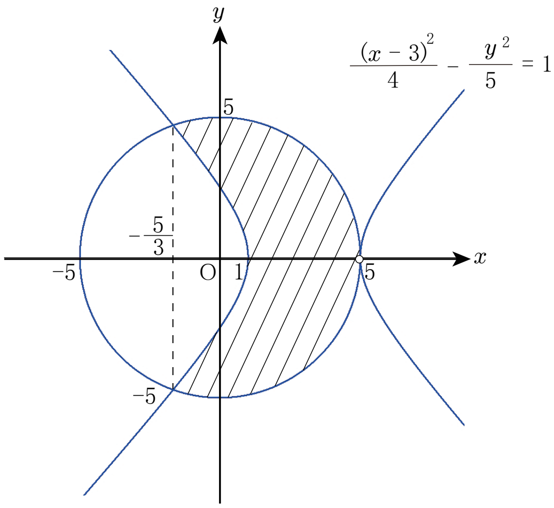
$$9x^2-30x-75=0$$

$$(x-5)(3x+5)=0$$

$$\therefore \quad x=5,\ -\frac{5}{3}$$

である.

以上より, 線分 PQ の通過範囲を図示すると次のようになる. ただし, 境界は点 $(5,0)$ は除き, それ以外は含む.



y
$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$
5
$-\frac{5}{3}$
−5
O
1
5
x
−5

理科第4問

(1)　y 軸と平行であるような C の接線は存在しないことに注意する．$y=x^3-kx$ より，$y'=3x^2-k$ であり，O での傾きは $-k$ である．$\tan\theta=-k\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，条件 $(*)$ を満たす P，Q が存在するためには，$\theta \fallingdotseq \pm\dfrac{\pi}{6}$，すなわち $-k \fallingdotseq \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ が必要であり，このときの接線の傾きは $\tan\left(\theta\pm\dfrac{\pi}{3}\right)$ である．よって，P，Q の x 座標は，

$$\begin{cases} 3x^2-k=\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right) & \cdots\cdots① \\ 3x^2-k=\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right) & \cdots\cdots② \end{cases}$$

の解である．加法定理を用いて①，②を変形すると，

$$\begin{cases} 3x^2-k=\dfrac{-k+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}k} \\ 3x^2-k=\dfrac{-k-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}k} \end{cases}$$

となり，これを整理すると，

$$\begin{cases} 3x^2=\dfrac{-k+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}k}+k=\dfrac{\sqrt{3}(k^2+1)}{1+\sqrt{3}k} \\ 3x^2=\dfrac{-k-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}k}+k=\dfrac{\sqrt{3}(k^2+1)}{\sqrt{3}k-1} \end{cases} \quad \text{すなわち} \begin{cases} x^2=\dfrac{k^2+1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}k+1)} & \cdots\cdots①' \\ x^2=\dfrac{k^2+1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}k-1)} & \cdots\cdots②' \end{cases}$$

となる．

求める k の値の範囲は，①$'$ を満たす 0 でない x のうちと，②$'$ を満たす 0 でない x のうちに，異なるものが存在するような k の値の範囲である．①$'$ と②$'$ の右辺が異なることに注意すると，求める k の値の範囲は，

$$\begin{cases} \sqrt{3}k+1>0 \\ \sqrt{3}k-1>0 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad k>\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

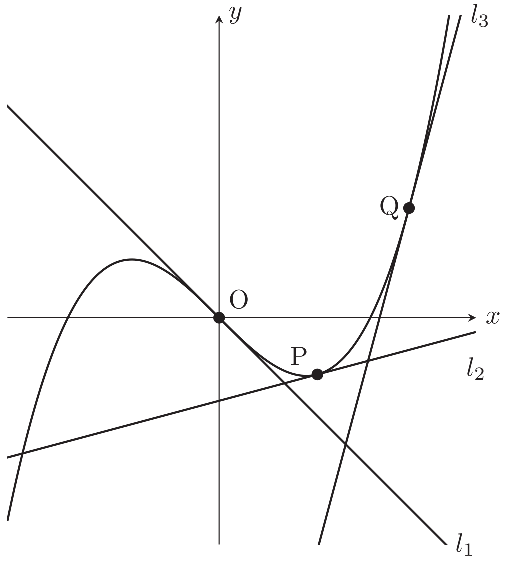
(2)　P，Q の x 座標は，①$'$，②$'$ より，

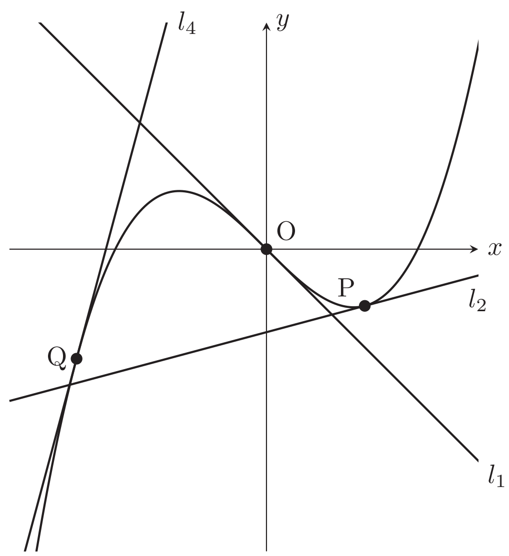
$$x=\pm\sqrt{\frac{k^2+1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}k+1)}} \quad \text{および} \quad x=\pm\sqrt{\frac{k^2+1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}k-1)}}$$

である．

$$\alpha=\sqrt{\frac{k^2+1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}k+1)}},\quad \beta=\sqrt{\frac{k^2+1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}k-1)}} \quad (0<\alpha<\beta) \qquad \cdots\cdots③$$

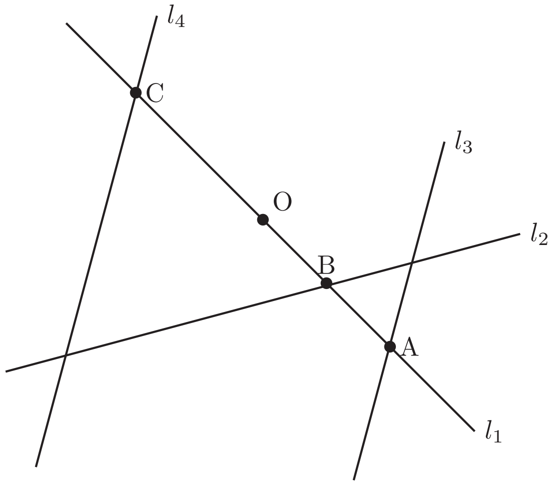
とおく．対称性により P の x 座標を $x=\alpha$ としても一般性を失わず，Q の x 座標は $x=\beta$，または $x=-\beta$ である．Q の x 座標が $x=\beta$，$x=-\beta$ のそれぞれの場合において，グラフは次のようになる．





よって，3 本の接線によって囲まれる三角形は，上図の 2 通りのみである．

O での接線を l_1，P での接線を l_2，$x=\beta$ における接線を l_3，$x=-\beta$ における接線を l_4 とする．S が最小の三角形は l_1，l_2，l_3 が囲む三角形であり，S が最大の三角形は l_1，l_2，l_4 が囲む三角形であり，いずれも正三角形である．曲線 C が O に関して点対称であることと，2 つの正三角形は相似であることを踏まえると，$M=4m$ となる条件は，これら 2 つの正三角形の面積比が $1:4$ となることであり，これは相似比が $1:2$ となることである．



上図のように点をとる．また，4 つの接線の方程式は，

$$l_1 : y=-kx, \qquad l_2 : y=(3\alpha^2-k)x-2\alpha^3, \qquad l_3 : y=(3\beta^2-k)x-2\beta^3, \qquad l_4 : y=(3\beta^2-k)x+2\beta^3$$

であるから，A，B，C の x 座標は順に，

$$-kx=(3\beta^2-k)x-2\beta^3, \qquad -kx=(3\alpha^2-k)x-2\alpha^3, \qquad -kx=(3\beta^2-k)x+2\beta^3$$

を解いて，

$$x=\frac{2\beta}{3}, \qquad x=\frac{2\alpha}{3}, \qquad x=-\frac{2\beta}{3}$$

である．2 つの正三角形の相似比が $1:2$ となる条件は，

$$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=1:2$$

であり，同一直線上の線分の長さの比は x 座標の差の大きさの比に等しいので，

$$\left(\frac{2}{3}\beta-\frac{2}{3}\alpha\right):\left(\frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{3}\beta\right)=1:2$$

すなわち，

$$(\beta-\alpha):(\alpha+\beta)=1:2$$

となることであるから，

$$\alpha:\beta=1:3 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\beta}{\alpha}=3$$

となることである．よって，③より，

$$\sqrt{\frac{\sqrt{3}k+1}{\sqrt{3}k-1}}=3$$

であり，両辺を 2 乗しても同値で，

$$\sqrt{3}k+1=9(\sqrt{3}k-1)$$

より，求める k の値は，

$$k=\frac{5}{4\sqrt{3}}, \text{ すなわち，} k=\frac{5\sqrt{3}}{12} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

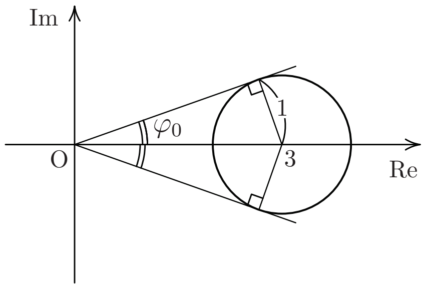
理科　第 5 問

$z-\alpha=p$ とおくと，$z=p+\alpha$ となり，z は $|z|=1$ を満たしながら動くので，$|p+\alpha|=1$．よって p は，

$$\text{中心が } -\alpha\text{，半径が } 1 \text{ の円} \qquad \cdots ①$$

の周上を動き，また，$w=p^3$ となる．

(1)



$\alpha=-3$ のとき，p は中心が 3，半径が 1 の円周上を動く．上図の φ_0 について，

$$\sin\varphi_0=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}\left(=\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

であるから，p の偏角 φ は，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{6}$ の範囲に取れる．このとき，$w=p^3$ より，$\theta=3\varphi$ としてよく，

$$|\theta|<3\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$$

の範囲にあり，$\sin\theta=\sin 3\varphi$ の最大値は $\varphi=\varphi_0$ のときで，そのとき

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\sin 3\varphi_0\\&=3\sin\varphi_0-4\sin^3\varphi_0=3\cdot\frac{1}{3}-4\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{23}{27}\end{aligned}$$

であるので，実軸に関する対称性により，求める $\sin\theta$ のとりうる値の範囲は，$-\dfrac{23}{27}\leqq\sin\theta\leqq\dfrac{23}{27}$.

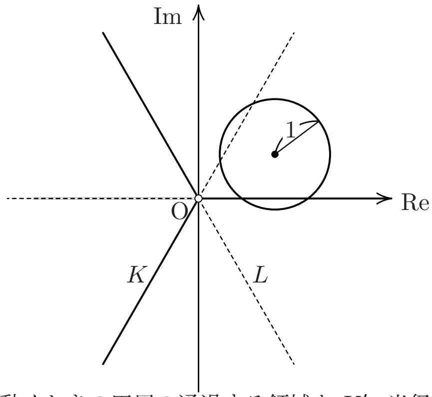
(2)　k を整数とする．

実軸の正の部分の偏角は $2k\pi$ となるので，D が実軸の正の部分と共有点をもつ条件は，$\dfrac{2k\pi}{3}$ となる p の偏角が存在することである．

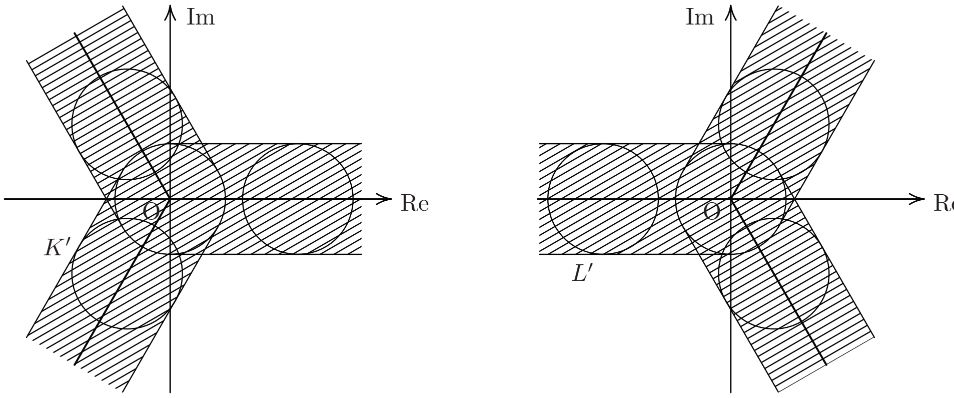
同様にして，実軸の負の部分の偏角は $(2k+1)\pi$ となるので，D が実軸の負の部分と共有点をもつ条件は，$\dfrac{(2k+1)\pi}{3}$ となる p の偏角が存在することである．

よって，円①上で，偏角 $\dfrac{2k\pi}{3}$ となる点が存在し，かつ，円①上で，偏角 $\dfrac{(2k+1)\pi}{3}$ となる点が存在する α の条件を求めればよい．

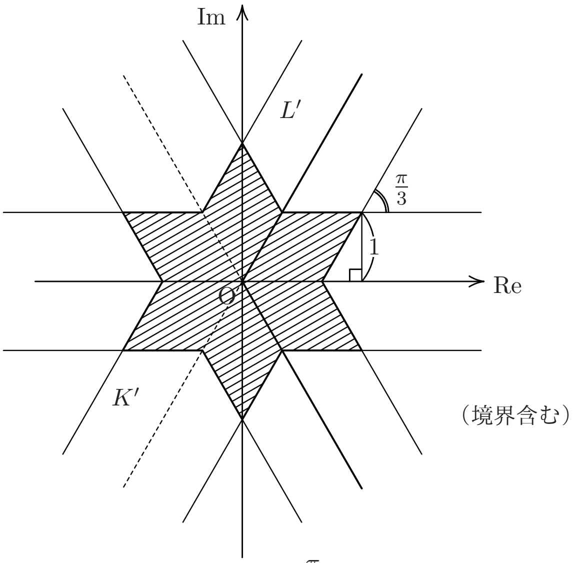
複素数平面上で，偏角が $\dfrac{2k\pi}{3}$ となる点全体の集合は，原点を除く 3 本の半直線の和集合 $\arg(z)=0,\ \pm\dfrac{2\pi}{3}$ となりこれを K，また偏角が $\dfrac{(2k+1)\pi}{3}$ となる点全体の集合は，原点を除く 3 本の半直線の和集合 $\arg(z)=\pi,\ \pm\dfrac{\pi}{3}$ となりこれを L とおく．このとき，円①が，K とも L とも共有点を持つような α の条件が求めるものである．



半径 1 である円周の中心が K 上を動くときの円周の通過する領域を K'，半径 1 である円周の中心が L 上を動くときの円周の通過する領域を L' としたとき，K' と L' の共通部分が円①の中心である $-\alpha$ の存在しうる領域となる．



その領域は下図斜線部（境界含む）となる．α と $-\alpha$ は原点に関して対称であり，図の K' と L' の共通部分の領域は原点対称な図形なので，α の存在する領域もこれに一致し，この領域の面積を求めればよい．



原点のまわりの回転対称性より，求める面積は $0 \leqq \arg(\alpha) \leqq \dfrac{\pi}{3}$ の部分の面積の 6 倍となり，$0 \leqq \arg(\alpha) \leqq \dfrac{\pi}{3}$ の部分は一辺の長さが $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ で高さが 1 のひし形なので，求める面積は，

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1 \cdot 6 = 4\sqrt{3}.$$

理 科 第 6 問

合同式の法は3とする．

(1)　$2800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$ であるから，m を2800の正の約数とすると，m は

$$m = 2^u \cdot 5^v \cdot 7^w \quad (\, u \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\},\ v \in \{0,\ 1,\ 2\},\ w \in \{0,\ 1\}\,)$$

と表せる．このとき $m \equiv (-1)^u \cdot (-1)^v \cdot 1^w = (-1)^{u+v}$ である．

$m \equiv 1$ となるのは $u+v$ が偶数のときであり，

$(u,\ v) = ($偶数, 偶数$)$ である組 $(u,\ v,\ w)$ の個数は $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

$(u,\ v) = ($奇数, 奇数$)$ である組 $(u,\ v,\ w)$ の個数は $2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$

である．よって

$$f(n) = 12 + 4 = 16$$

である．

$m \equiv 2 \equiv -1$ となるのは $u+v$ が奇数のときであり，

$(u,\ v) = ($偶数, 奇数$)$ である組 $(u,\ v,\ w)$ の個数は $3 \cdot 1 \cdot 2 = 6$

$(u,\ v) = ($奇数, 偶数$)$ である組 $(u,\ v,\ w)$ の個数は $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

である．よって

$$g(n) = 6 + 8 = 14$$

である．

(2)　n は次の形で表せる．

$$n = 3^a \cdot p_1^{b_1} \cdot \cdots\cdots \cdot p_k^{b_k} \cdot q_1^{c_1} \cdot \cdots\cdots \cdot q_l^{c_l}$$

$$\left(\begin{array}{l} 3,\ p_1,\ \cdots\cdots,\ p_k,\ q_1,\ \cdots\cdots,\ q_l \text{ は相異なる素数} \\ p_1 \equiv \cdots\cdots \equiv p_k \equiv 1,\ q_1 \equiv \cdots\cdots \equiv q_l \equiv -1 \\ a,\ b_1,\ \cdots\cdots,\ b_k,\ c_1,\ \cdots\cdots,\ c_l \text{ は } 0 \text{ 以上の整数} \end{array}\right)$$

m を n の正の約数とすると，m は次の形で表せる．

$$m = 3^x \cdot p_1^{y_1} \cdot \cdots\cdots \cdot p_k^{y_k} \cdot q_1^{z_1} \cdot \cdots\cdots \cdot q_l^{z_l}$$

$$\left(\begin{array}{l} x,\ y_1,\ \cdots\cdots,\ y_k,\ z_1,\ \cdots\cdots,\ z_l \text{ は整数で} \\ 0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y_1 \leqq b_1,\ \cdots\cdots,\ 0 \leqq y_k \leqq b_k,\ 0 \leqq z_1 \leqq c_1,\ \cdots\cdots,\ 0 \leqq z_l \leqq c_l \end{array}\right)$$

このとき，

$m \equiv 1 \iff (\, x = 0$ かつ $y_1,\ \cdots\cdots,\ y_k$ は任意かつ $z_1 + \cdots\cdots + z_l$ が偶数$)$

$m \equiv 2 \iff (\, x = 0$ かつ $y_1,\ \cdots\cdots,\ y_k$ は任意かつ $z_1 + \cdots\cdots + z_l$ が奇数$)$

である．

ここで，一般に，0以上の整数 $c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots$ が与えられたとき，

$0 \leqq z_1 \leqq c_1,\ \cdots\cdots,\ 0 \leqq z_l \leqq c_l$ かつ $z_1 + \cdots\cdots + z_l$ が偶数

となる整数の組 $(z_1,\ \cdots\cdots,\ z_l)$ の個数を S_l とし，

$0 \leqq z_1 \leqq c_1,\ \cdots\cdots,\ 0 \leqq z_l \leqq c_l$ かつ $z_1 + \cdots\cdots + z_l$ が奇数

となる整数の組 $(z_1,\ \cdots\cdots,\ z_l)$ の個数を T_l とする．z_{l+1} を $0 \leqq z_{l+1} \leqq c_{l+1}$ を満たす整数とするとき，

$z_1 + \cdots\cdots + z_l + z_{l+1}$ が偶数 $\iff$ $(z_1 + \cdots\cdots + z_l,\ z_{l+1}) = ($偶数, 偶数$),\ ($奇数, 奇数$)$

$z_1 + \cdots\cdots + z_l + z_{l+1}$ が奇数 $\iff$ $(z_1 + \cdots\cdots + z_l,\ z_{l+1}) = ($偶数, 奇数$),\ ($奇数, 偶数$)$

である．よって，c_{l+1} が奇数のときは

$$S_{l+1} - T_{l+1} = \left(S_l \cdot \frac{c_{l+1}+1}{2} + T_l \cdot \frac{c_{l+1}+1}{2}\right) - \left(S_l \cdot \frac{c_{l+1}+1}{2} + T_l \cdot \frac{c_{l+1}+1}{2}\right) = 0$$

であり，c_{l+1} が偶数のときは

$$S_{l+1}-T_{l+1}=\left(S_l\cdot\frac{c_{l+1}+2}{2}+T_l\cdot\frac{c_{l+1}}{2}\right)-\left(S_l\cdot\frac{c_{l+1}}{2}+T_l\cdot\frac{c_{l+1}+2}{2}\right)=S_l-T_l$$

である．このことと，S_1-T_1 が 0 か 1 であることより，全ての l に対して S_l-T_l は 0 か 1 となる．したがって，

$$f(n)=(b_1+1)\cdots\cdots(b_k+1)S_l \qquad \cdots\cdots ①$$

$$g(n)=(b_1+1)\cdots\cdots(b_k+1)T_l \qquad \cdots\cdots ②$$

であることより $f(n)\geqq g(n)$ である．

(3) (2) の記号を用いる．②の値が 15 であるから，

$$((b_1+1)\cdots\cdots(b_k+1),\ T_l)=(1,\ 15),\ (3,\ 5),\ (5,\ 3),\ (15,\ 1)$$

が必要である．このことと，S_l-T_l が 0 か 1 であることより，

$$((b_1+1)\cdots\cdots(b_k+1),\ S_l)$$
$$=(1,\ 15),\ (1,\ 16),\ (3,\ 5),\ (3,\ 6),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4),\ (15,\ 1),\ (15,\ 2)$$

となるから，①より

$$f(n)=15,\ 16,\ 18,\ 20,\ 30 \qquad \cdots\cdots ③$$

が必要である．ここで

$n=2^{29}$ のとき $f(n)=15,\ g(n)=15$

$n=2^{30}$ のとき $f(n)=16,\ g(n)=15$

$n=7^2\cdot2^{10}$ のとき $f(n)=18,\ g(n)=15$

$n=7^4\cdot2^6$ のとき $f(n)=20,\ g(n)=15$

$n=7^{14}\cdot2^2$ のとき $f(n)=30,\ g(n)=15$

となるから，③の値は全て $f(n)$ のとりうる値である．以上より，$f(n)$ のとりうる値は

15，16，18，20，30

である．