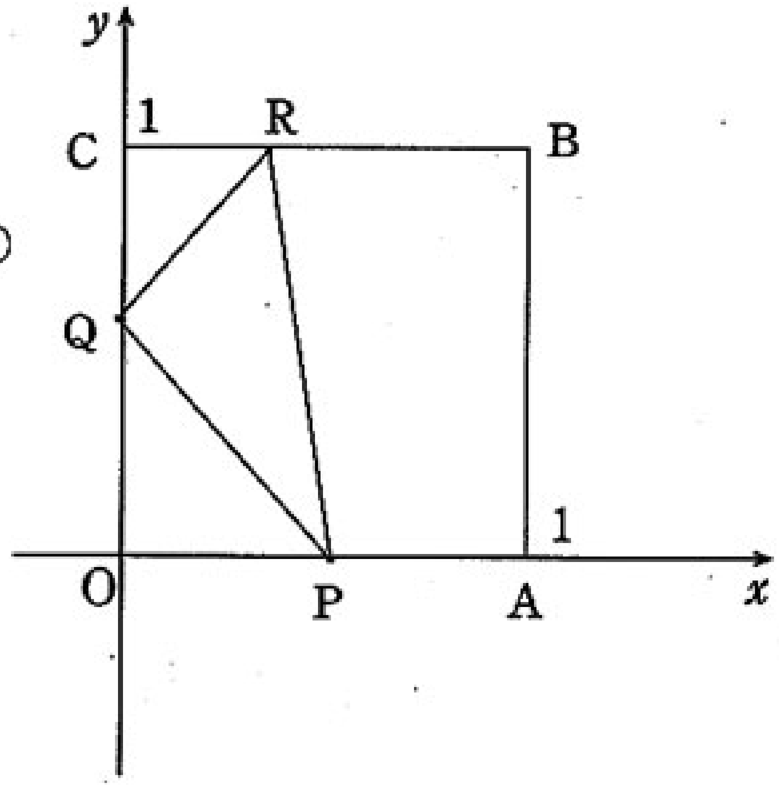
東大文科　第1問



(1)　3点 P, Q, R はそれぞれ，辺 OA，OC，BC 上にあるから

$$0 \leqq p \leqq 1,\ 0 \leqq q \leqq 1,\ 0 \leqq r \leqq 1 \quad \cdots\cdots①$$

である．

△OPQ の面積が $\frac{1}{3}$ より

$$\frac{1}{2}pq = \frac{1}{3}$$

すなわち

$$pq = \frac{2}{3} \quad \cdots\cdots②$$

△PQR の面積が $\frac{1}{3}$ より

$$\text{台形 OPRC} - (\triangle\text{OPQ} + \triangle\text{CQR}) = \frac{1}{3}$$

よって

$$\frac{1}{2}(p+r)\cdot 1 - \left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}(1-q)r\right\} = \frac{1}{3}$$

すなわち

$$p + qr = \frac{4}{3} \quad \cdots\cdots③$$

②より

$$p \neq 0 \quad \cdots\cdots④$$

であり

$$q = \frac{2}{3p} \quad \cdots\cdots②' \cdots\cdots \text{(答)}$$

③に代入して

$$p + \frac{2}{3p}r = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2}{3p}r = \frac{4}{3} - p$$

よって

$$r = \frac{p(4-3p)}{2} \quad \cdots\cdots⑤ \cdots\cdots \text{(答)}$$

①，④，②'，⑤より

$$0 < p \leqq 1,\ 0 \leqq \frac{2}{3p} \leqq 1,\ 0 \leqq \frac{p(4-3p)}{2} \leqq 1$$

である．よって

$$0<p\leqq 1,\ p\geqq \frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots⑥$$

かつ

$$0\leqq -3p^2+4p\leqq 2 \qquad \cdots\cdots⑦$$

であり

$$⑦\Leftrightarrow 0\leqq -3\left(p-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3}\leqq 2 \Leftrightarrow \left(p-\frac{2}{3}\right)^2\leqq \frac{4}{9}$$

よって，⑥は常に⑦を満たす.

したがって，p のとりうる値の範囲は，⑥より

$$\frac{2}{3}\leqq p\leqq 1 \qquad \cdots\cdots⑧\cdots\cdots（答）$$

である．⑧の各辺の逆数をとって

$$\frac{3}{2}\geqq \frac{1}{p}\geqq 1$$

よって

$$\frac{2}{3}\leqq \frac{2}{3p}\leqq 1$$

であるから，q のとり得る値の範囲は

$$\frac{2}{3}\leqq q\leqq 1 \qquad \cdots\cdots（答）$$

である．また

$$r=-\frac{3}{2}\left(p-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$$

であるから，⑧より

$$\frac{1}{2}\leqq r\leqq \frac{2}{3} \qquad \cdots\cdots（答）$$

である.

(2) (1)より

$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}=\frac{r}{q}=\frac{\frac{p(4-3p)}{2}}{\frac{2}{3p}}=\frac{3p^2(4-3p)}{4}$$

$$=3p^2-\frac{9}{4}p^3$$

$f(p)=3p^2-\frac{9}{4}p^3$ とおくと

$$f'(p)=6p-\frac{27}{4}p^2=\frac{3}{4}p(8-9p)$$

$f(p)$ の増減は次の通り.

p	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{8}{9}$	$\cdots$	1
$f'(p)$		$+$	0	$-$	
$f(p)$		↗		↘	

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=3\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2}{3}\,,\ f\left(\frac{8}{9}\right)=3\left(\frac{8}{9}\right)^2-\frac{9}{4}\left(\frac{8}{9}\right)^3=\frac{64}{81}\,,\ f(1)=3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$$

であるから，$f(p)$ すなわち $\dfrac{\mathrm{CR}}{\mathrm{OQ}}$ の

最大値は $\dfrac{64}{81}$ ……（答）

最小値は $\dfrac{2}{3}$ ……（答）

である．

文 科 第 2 問

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 2p + 2q$ であるから, 条件 1 は,

$$8 \leqq 2p + 2q \leqq 17$$

$$\therefore \quad 4 \leqq p + q \leqq \frac{17}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

また, 直線 l の方程式は, $x + y - 4 = 0$ であるから,

$$c = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$d = \frac{|p+q-4|}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{p+q-4}{\sqrt{2}} \quad (\because\ ① \text{ より } p+q \geqq 4)$$

したがって, 条件 2 は次のようになる.

$$2\sqrt{2} \cdot \frac{p+q-4}{\sqrt{2}} \geqq (p-1)^2$$

$$\therefore \quad 2(p+q-4) \geqq (p-1)^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

① と ② の境界の共有点の座標は,

$$\begin{cases} p + q = 4 \\ 2(p+q-4) = (p-1)^2 \end{cases}$$

より, $(p, q) = (1, 3)$. および

$$\begin{cases} p + q = \dfrac{17}{2} \\ 2(p+q-4) = (p-1)^2 \end{cases}$$

より, $(p, q) = \left(-2, \dfrac{21}{2}\right), \left(4, \dfrac{9}{2}\right)$ である.

次に, ② は,

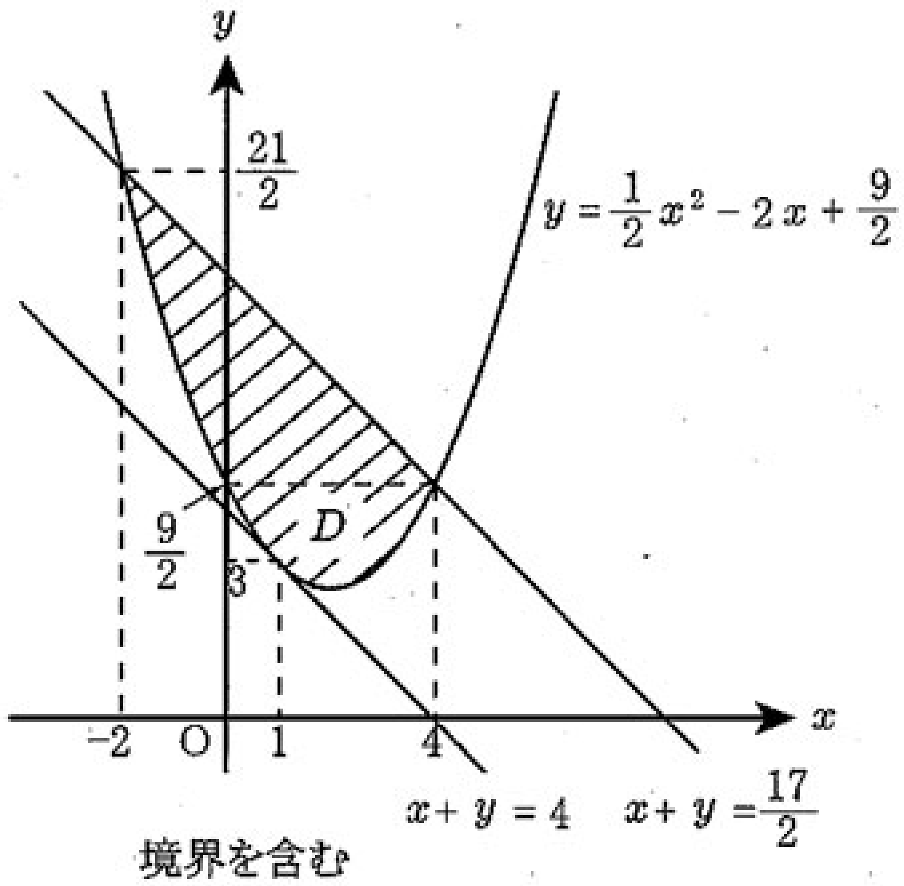
$$2q \geqq p^2 - 4p + 9$$

$$\therefore \quad q \geqq \frac{1}{2}p^2 - 2p + \frac{9}{2} \qquad \cdots\cdots ③$$

となるから, ①, ③ より, D を表す不等式は,

$$4 \leqq x + y \leqq \frac{17}{2} \text{ かつ } y \geqq \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{9}{2}$$

であり, D を図示すると次のようになる.



境界を含む

D の面積は次のようになる.

$$\int_{-2}^{4}\left\{\left(-x+\frac{17}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}\right)\right\}dx=\int_{-2}^{4}\frac{1}{2}(x+2)(4-x)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\{4-(-2)\}^3$$
$$=18$$

(2) 放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{9}{2}$ と直線 $y=mx$ が接する m の値は,

$$\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{9}{2}=mx$$
$$x^2-2(m+2)x+9=0 \qquad \cdots\cdots ③$$

が重解をもつ条件より,

$$\frac{(判別式)}{4}=(m+2)^2-9=0$$
$$(m+5)(m-1)=0$$
$$m=-5,\ 1$$

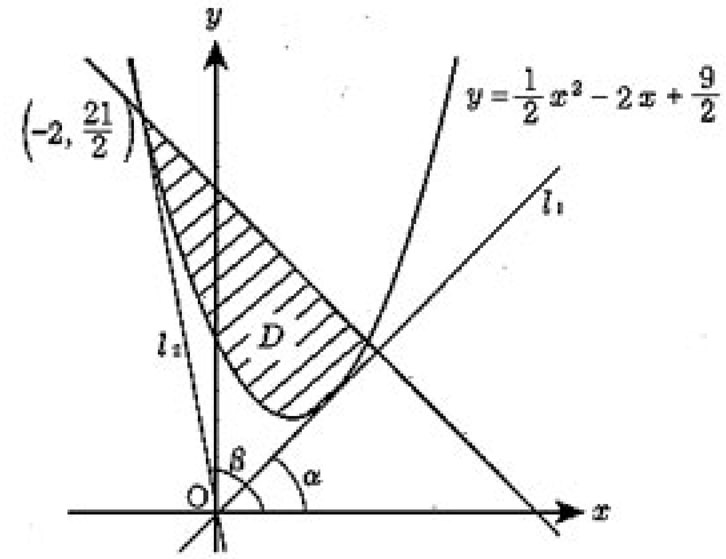
である.

$m=-5$ のとき ③ の解は $x=-3$ であるから, $-2\leqq x\leqq 4$ の範囲では接しない.

また, $m=1$ のとき ③ の解は $x=3$ であるから, $-2\leqq x\leqq 4$ の範囲で接する.

したがって, 直線 $y=x$ を l_1, 点 O と点 $\left(-2,\dfrac{21}{2}\right)$ を通る直線を l_2 とお

くと, D は次の図のように, l_1 と l_2 に挟まれた「$y \geqq x$ かつ $y \geqq -\dfrac{21}{4}x$」の部分に存在する.



l_1, l_2 と x 軸の正の部分のなす角を順に α, β とおくと, θ は

$(0<)\ \alpha \leqq \theta \leqq \beta\ (<\pi)$ の範囲をとるから, $\cos\theta$ は $\cos\beta \leqq \cos\theta \leqq \cos\alpha$ をとる.

$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ より $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\beta = -\dfrac{21}{4},\ 0<\beta<\pi$ より $\cos\beta = -\dfrac{4}{\sqrt{457}}$

したがって, $\cos\theta$ のとりうる値の範囲は,

$$-\frac{4}{\sqrt{457}} \leqq \cos\theta \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

である.

文科第３問

コインを10回投げて，ある事象が起こる場合の数をn通りとすると，このときの確率は，

$$n\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{n}{2^{10}}$$

で与えられる．

いま，表を○，裏を×とする．

(1) 事象Sが起こるような○，×が出る回数をそれぞれx，yとすると，組(x,y)は，

$$x+y=10\text{ かつ }|x-y|\equiv 0 \pmod 8\text{ かつ }0\leqq x\leqq 10\text{ かつ }0\leqq y\leqq 10$$

を満たすような非負整数の組であるから，これらを解いて，

$$(x,y)=(9,1)\text{ または }(1,9)\text{ または }(5,5) \qquad \cdots\cdots(*)$$

である．

よって，求める確率$P(S)$は，

$$P(S)=\frac{{}_{10}C_1+{}_{10}C_9+{}_{10}C_5}{2^{10}}$$

$$=\frac{17}{64}$$

である．

(2) 事象$S\cap T$が起こるには，事象Sが起こることが必要であるから，(x,y)が$(*)$を満たさねばならない．$(*)$のうち，事象Tも起こるのは，

$(x,y)=(9,1)$ または $(1,9)$

または“$(x,y)=(5,5)$ で点Pが少なくとも１回点Fに移動する”

ような場合である．

ここで，“$(x,y)=(5,5)$ で点Pが少なくとも１回点Fに移動する”のは，初めてFに到達するのが3，5，7回目のいずれかで，

（ⅰ）3回目のときは初めの3回が×××の場合で，$1\cdot{}_7C_2$通り

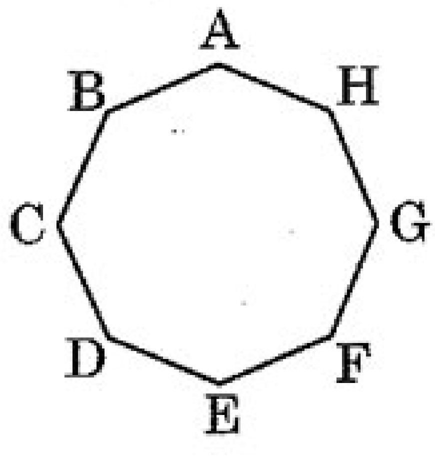
（ⅱ）5回目のときは，“初めの5回が○”または“初めの3回中○が1回でその後××”となる場合で，$1+3\cdot{}_5C_1$通り

（ⅲ）7回目のときは，初めの5回中○が2回（ただし，×××○○を除く）でその後××となる場合で，$({}_5C_2-1)\cdot 1$通り

であるから，この場合は，

$${}_7C_2+1+3\cdot{}_5C_1+{}_5C_2-1=46\text{（通り）}$$

である．



よって，求める確率$P(S\cap T)$は，

$$P(S\cap T)=\frac{{}_{10}C_1\cdot 2+46}{2^{10}}$$

$$=\frac{33}{512}$$

である．

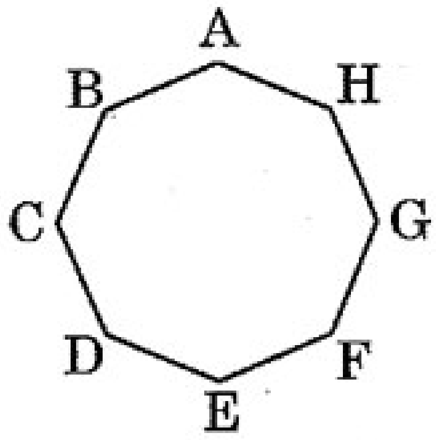
(注) (2)の（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）は初めの○×の配列がつぎの場合に対応する．

(i) ×××　……${}_7C_2$ 通り

(ii) ○○○○○　……1通り

○××××
×○×××
××○××　……各 ${}_5C_1$ 通り

(iii) ○○×××××
○×○××××
○××○×××
○×××○××
×○○××××
×○×○×××
×○××○××
××○○×××
××○×○××　……各1通り



文 科 第 4 問

(1) まず D を図示する．D を表す不等式を変形すると

$$|x|+|y| \leqq 1 \iff |y| \leqq -|x|+1 \iff |x|-1 \leqq y \leqq -|x|+1$$

となるから，D は図 1 の斜線部分 (境界を含む) である．

次に E を図示する．Q を固定して P を動かしたときの R の動く範囲は

D を $-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ だけ平行移動した図形

である．ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OQ'}}=-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ となる点 Q$'$ をとると，D が原点に関して対称であることから，Q を D 内で動かすと Q$'$ も D を動く．以上から，E は図 2 の斜線部分 (境界を含む) となる．

図 1

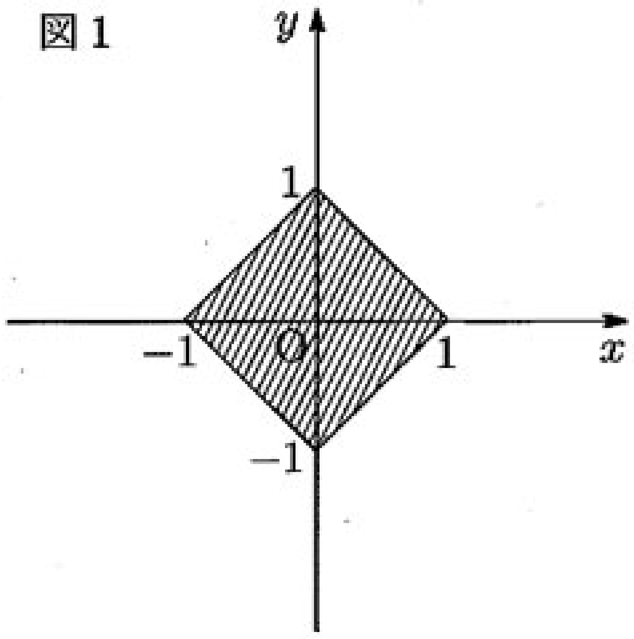
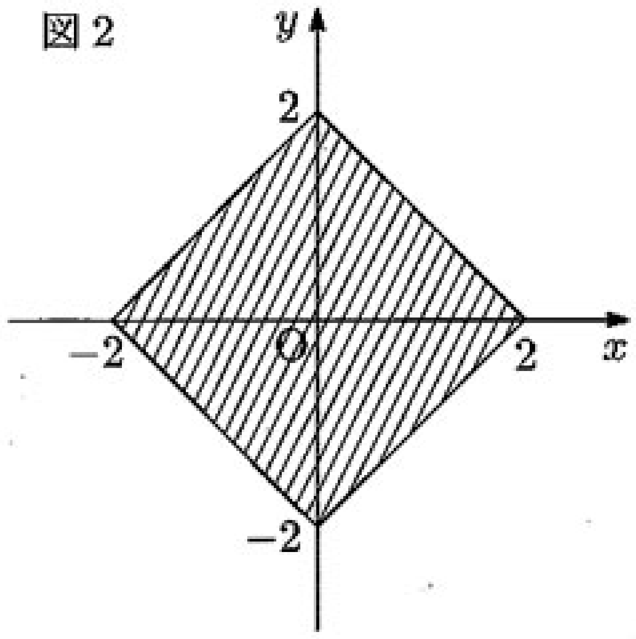


図 2



(2) $\overrightarrow{v}=(a,b)$ とおくと，F は D を $\overrightarrow{v}$ だけ平行移動したものである．よって，点 P，Q を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{v}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}-\overrightarrow{v}$$

で定めると，P，Q の動く範囲は D であり，$\overrightarrow{\mathrm{OU}}$ は

$$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{v})-(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{v})=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

と表されるから，G は E と一致する．