2019年度 京都大学 前期 数学 (理系)

1

問 1　3 倍角の公式より

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos\theta(4\cos^2\theta - 3) = \cos\theta(2\cos 2\theta - 1) \qquad \cdots\cdots ①$$

ここで，$\cos 2\theta \neq \frac{1}{2}$ と仮定すると

$$\cos\theta = \frac{\cos 3\theta}{2\cos 2\theta - 1}$$

$\cos 2\theta$, $\cos 3\theta$ は有理数なので右辺は有理数となり，左辺の $\cos\theta$ が有理数でないことに反する．よって，$\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ であり，①より $\cos 3\theta = 0$

$0 < 2\theta < \pi$ より，$2\theta = \frac{\pi}{3}$ $\quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

このとき，$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となり，3 は素数なので $\sqrt{3}$ は有理数でない．よって，$\frac{\sqrt{3}}{2}$ は有理数でないので，確かに $\cos\theta$ の値は有理数でない．

以上より，$\theta = \frac{\pi}{6}$ $\qquad \cdots\cdots$(答)

問 2 (1)　部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx &= \Big[x\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx \\
&= \frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx \\
&= \frac{\pi}{4} + \Big[\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\pi}{4} + \log\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 \qquad \cdots\cdots (答)
\end{aligned}$$

(2)　$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}\,dx$ とおく．

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx$$

$\sin x = t$ とおくと，$\cos x\,dx = dt$

x	$0 \to$	$\frac{\pi}{4}$
t	$0 \to$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-t^2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\Big[-\log|1-t| + \log|1+t|\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\log\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \log\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \log(\sqrt{2}+1) \qquad \cdots\cdots (答)
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

$$f(x)=x^3+2x^2+2$$

「$|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ がともに素数となる」…(*)

$f(n)=n^3+2(n^2+1)$ より，$f(n)$ と n^3 の偶奇は一致する。よって，$f(n)$ と $f(n+1)$ の偶奇は異なるので，$|f(n)|$，$|f(n+1)|$ のいずれかは偶数となる。偶数の素数は 2 のみなので，(*) を満たすためには

$$|f(n)|=2 \text{ または } |f(n+1)|=2$$

であることが必要。

ここで，$|f(n)|=2$ となる整数 n は

(I) $n^3+2n^2+2=2$ より，$n^2(n+2)=0$ $\therefore\ n=0,\ -2$

(II) $n^3+2n^2+2=-2$ より，$n^2(-n-2)=4$ これを満たす整数 n は 4 の約数，つまり $n=\pm1,\ \pm2$ であるが，いずれも満たさない。

よって，$|f(n)|=2$ となる整数 n は，$n=0,\ -2$ のときのみ。

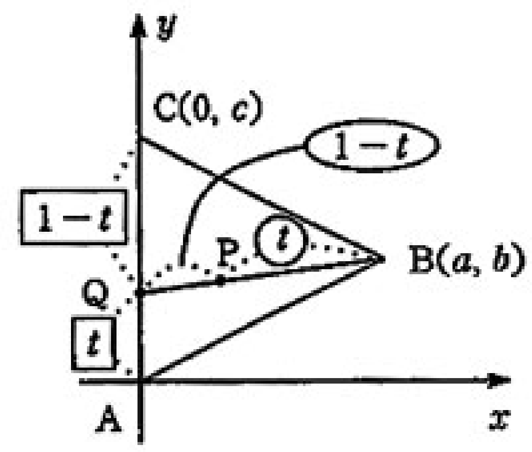
同様にして，$|f(n+1)|=2$ となる整数 n は，$n+1=0,\ -2$ つまり $n=-1,\ -3$

$f(-3)=-7,\ f(-2)=2,\ f(-1)=3,\ f(0)=2,\ f(1)=5$ より，$n=-3,\ -2,\ -1,\ 0$ いずれの場合も (*) を満たす。

以上より，求める整数 n は

$$n=-3,\ -2,\ -1,\ 0 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$\boxed{3}$



Aを原点に$B(a, b)$ $(a>0)$, $C(0, c)$ $(c>0)$となるように座標軸を定めてよい．このとき，三角形ABCの面積は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AC}\cdot(\text{B の } x \text{ 座標})=\frac{1}{2}ac \quad \cdots\cdots ①$$

である．点Qは線分ACを$t:1-t$に内分するから，

$$Q(0, ct)$$

であり，Pは線分BQを$t:1-t$に内分するから，

$$P(a(1-t), ct^2+b(1-t))$$

と表せる．$P(x, y)$とすると，

$$x=a(1-t),\ y=ct^2+b(1-t)$$

だから，$0<t<1$より，$0<x<a$のもとで，

$$t=1-\frac{x}{a}$$

より，Pの軌跡の方程式は，

$$y=c\left(1-\frac{x}{a}\right)^2+b\cdot\frac{x}{a}=\frac{c}{a^2}x^2-\frac{2c-b}{a}x+c$$

であり，これを$y=f(x)$とおく．直線BCの方程式は

$$y=\frac{b-c}{a}x+c$$

だから，これを$y=g(x)$として，

$$f(x)-g(x)=\frac{c}{a^2}x(x-a)$$

と表せるので，$0\leqq x\leqq a$において，$f(x)\leqq g(x)$である．したがって，Dと線分BCによって囲まれる部分の面積Tは

$$T=\int_0^a\{g(x)-f(x)\}dx=-\frac{c}{a^2}\int_0^a x(x-a)dx$$
$$=\frac{c}{a^2}\cdot\frac{1}{6}a^3=\frac{1}{6}ac \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②より，

$$T=\frac{1}{3}S \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

4

事象A：さいころを1回投げて4以下の目が出る.

事象B：さいころを1回投げて5以上の目が出る.

とする.

どこではじめてBが起こるかで場合分けすると，与条件を満たすのは

$$(*)\ \underbrace{AA\cdots\cdots A}_{k\text{個}}\underbrace{BB\cdots\cdots B}_{l\text{個}}\underbrace{AA\cdots\cdots A}_{n-k-l\text{個}}$$

$0 \leqq k,\ 1 \leqq l,\ 0 \leqq n-k-l$ ……①

となる場合に限る.

(＊)が起こる確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^l\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-l}\left(\frac{1}{3}\right)^l=\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^l \text{……②}$$

であり，求める確率 p_n は①をみたすすべての $(k,\ l)$ についての②の総和である.

k を固定して l を動かしたとき，①より

$1 \leqq l \leqq n-k$

だから，このとき(＊)が起こる確率は

$$\sum_{l=1}^{n-k}\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^l=\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\sum_{l=1}^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^l$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right\}$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^n\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right\}$$

さらに $0 \leqq k,\ 1 \leqq n-k$ より

$k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1$

だから求める確率 p_n は

$$p_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n 2^k$$

$$=n\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\frac{1-2^n}{1-2}$$

$$=n\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n(2^n-1)$$

$$=\frac{(n-1)2^n+1}{3^n} \text{……(答)}$$

5

四角錐 $AB_1B_2B_3B_4$ を T，正方形 $B_1B_2B_3B_4$ を S と呼ぶ．

与えられた球面の中心を O，S の対角線の交点を I とする．S を含む平面に A から下ろした垂線の足を H とし，$x = AH$ とおく．

S を底面とみたとき T の体積が最大になるのは，A，O，I がこの順に一直線上に並ぶときである．このとき H = I だから $1 \leqq x < 2$，$OH = x - 1$ である．$\triangle OB_1H$ にピタゴラスの定理を用いると，

$$B_1H = \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{2x - x^2}$$

したがって S の面積は，

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2x-x^2})^2 \cdot 4 = 2(2x - x^2)$$

ゆえに T の体積 V は，

$$V = \frac{1}{3} \cdot x \cdot 2(2x - x^2) = \frac{2}{3}(2x^2 - x^3)$$

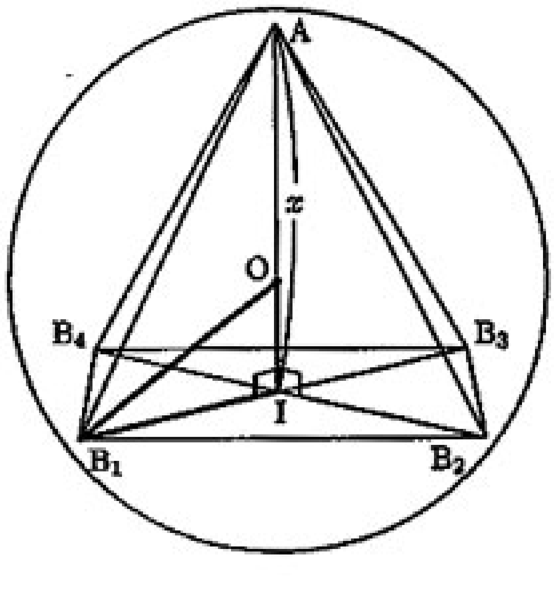
この式の右辺を $f(x)$ とおく．

$$f'(x) = \frac{2}{3}(4x - 3x^2) = -2x\left(x - \frac{4}{3}\right)$$

x	1	$\cdots$	4/3	$\cdots$	2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	64/81	↘	

増減表より $x = \dfrac{4}{3}$ のとき $f(t)$ は最大になるから，V の最大値は，

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{64}{81}$$ …………(答)



6

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ であるから

$$(1+i)^n=\sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$(1-i)^n=\overline{(1+i)^n}=\sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

ゆえに

$$(1+i)^n+(1-i)^n=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}$$

よって求めるものは

$$2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}>10^{10} \qquad \cdots(*)$$

をみたす最小の正の整数 n である.

$(*)$ が成り立つとき $\cos\frac{n\pi}{4}>0$ より

$$n\equiv -1,\ 0,\ 1 \pmod 8 \qquad \cdots①$$

$n\leqq 64$ のとき

$$2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}\leqq 2^{\frac{64}{2}+1}=2^{33}$$

であり, 常用対数表より $\log_{10}2<0.30105$ であるから

$$\log_{10}2^{33}=33\log_{10}2<33\cdot 0.30105=9.93465<10$$

よって $2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}<10^{10}$ であり, $(*)$ は不成立.

ゆえに ① をみたす 65 以上の n を小さい方から調べる.

・$n=65$ のとき, $\log_{10}2<0.30105$ に注意すると

$$\log_{10}\left(2^{\frac{65}{2}+1}\cos\frac{65\pi}{4}\right)=33\log_{10}2<33\cdot 0.30105=9.93465<10$$

よって $2^{\frac{65}{2}+1}\cos\frac{65\pi}{4}<10^{10}$ であるから $(*)$ は不成立.

・$n=71$ のとき, $\log_{10}2\geqq 0.30095$ に注意すると

$$\log_{10}\left(2^{\frac{71}{2}+1}\cos\frac{71\pi}{4}\right)=36\log_{10}2\geqq 36\cdot 0.30095=10.8342>10$$

よって $2^{\frac{71}{2}+1}\cos\frac{71\pi}{4}>10^{10}$ であるから $(*)$ は成立.

以上より求める n の値は

$$\boldsymbol{n=71}\cdots\cdots(答)$$