2019年度 京都大学 前期 数学 (文系)

1

問 1

$$x^5+2x^4+ax^3+3x^2+3x+2=(x^3+x^2+x+1)(x^2+x+a-2)+(3-a)x^2+(4-a)x+4-a$$

であるから

$$Q(x)=x^2+x+a-2,\quad R(x)=(3-a)x^2+(4-a)x+4-a$$

$R(x)$ の 1 次の項の係数が 1 のとき

$$4-a=1 \qquad \therefore\ a=3 \ \cdots\cdots (答)$$

よって

$$Q(x)=x^2+x+1,\quad R(x)=x+1 \ \cdots\cdots\ (答)$$

問 2 常用対数表より，$0.95125 \leqq \log_{10} 8.94 < 0.95135$ であり，$\log_{10} 8.94^{18} = 18\log_{10} 8.94$ であるから

$$17.1225 \leqq 18\log_{10} 8.94 < 17.1243$$
$$\therefore\ 10^{17.1225} \leqq 8.94^{18} < 10^{17.1243}$$

ここで，$10^{17.1225}=10^{17}\cdot 10^{0.1225}$, $10^{17.1243}=10^{17}\cdot 10^{0.1243}$ であり
常用対数表より，$1.3 < 10^{0.1225}$, $10^{0.1243} < 1.4$ であるから，

$$1.3\cdot 10^{17} < 8.94^{18} < 1.4\cdot 10^{17}$$

したがって，8.94^{18} の整数部分の桁数は

18 桁 ⋯⋯ (答)

最高位からの 2 桁は

13 ⋯⋯ (答)

$\boxed{2}$

$$f(x) = x^2 + 2(ax + b|x|)$$

$$= \begin{cases} x^2 + 2(a+b)x = \{x-(-a-b)\}^2 - (a+b)^2 & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ x^2 + 2(a-b)x = \{x-(-a+b)\}^2 - (a-b)^2 & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

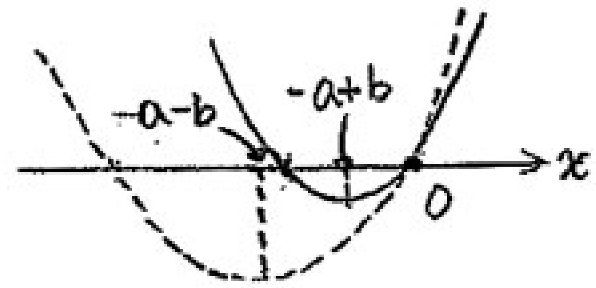
b は正の定数であるから，$-a-b < -a+b$ である。

(i) $a > b$ のとき，

$$-a-b < -a+b < 0$$

であるから，$f(x)$ は $x = -a+b$ で最小となり

$$m = f(-a+b) = -(a-b)^2$$

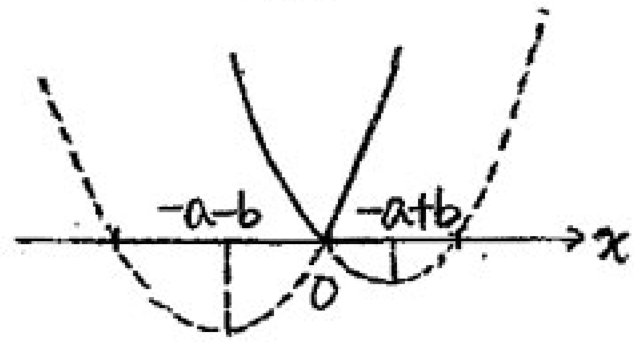


(ii) $-b \leqq a \leqq b$ のとき，

$$-a-b \leqq 0 \leqq -a+b$$

であるから，$f(x)$ は $x = 0$ で最小となり，

$$m = f(0) = 0$$

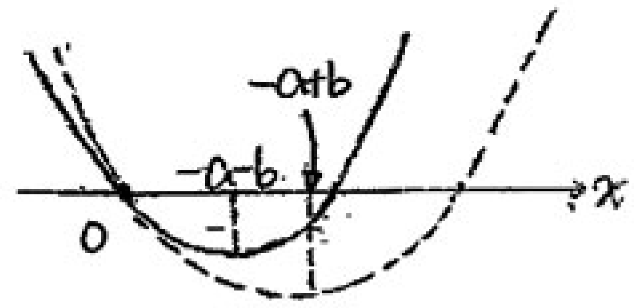


(iii) $a < -b$ のとき，

$$0 < -a-b < -a+b$$

であるから，$f(x)$ は $x = -a-b$ で最小となり，

$$m = f(-a-b) = -(a+b)^2$$

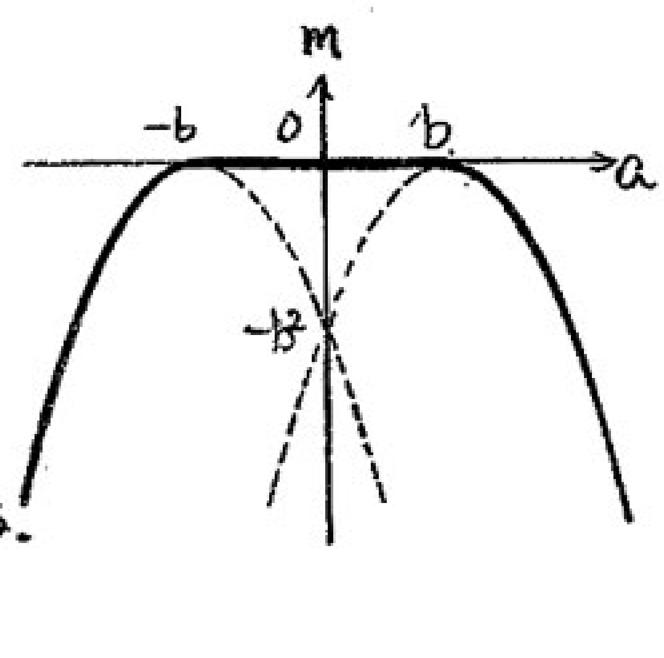


以上 (i), (ii), (iii) より

$$m = \begin{cases} -(a-b)^2 & (a > b \text{ のとき}) \\ 0 & (-b \leqq a \leqq b \text{ のとき}) \\ -(a+b)^2 & (a < -b \text{ のとき}) \end{cases}$$

$\cdots\cdots$ (答)

であり，これを a の値を横軸に，m の値を縦軸にとって，m のグラフをかくと右のようになる。



3

$$ax^2+bx+c<0 \quad \cdots\cdots ①$$

とする．

(i) $a<0$ のとき

$y=ax^2+bx+c$ のグラフは上に凸な放物線であるから，任意の実数 c に対して命題は成り立つ．

よって，求める必要十分条件は「$a<0$ かつ c は任意の実数」

(ii) $a=0$ のとき

(ア) $c\geqq 0$ のとき

$b=0$ のとき ① をみたす実数 x が存在しない．つまり $b=0$ が反例となるので命題は成り立たない．

(イ) $c<0$ のとき

$x=0$ が ① をみたすので，命題は成り立つ．

よって，求める必要十分条件は「$a=0$ かつ $c<0$」

(iii) $a>0$ のとき

$y=ax^2+bx+c$ のグラフは下に凸な放物線であるから，ある実数 x が ① をみたす条件は

$$b^2-4ac>0 \quad \cdots\cdots ②$$

ここで，$f(b)=b^2-4ac$ とすると，$f(b)$ の最小値は $f(0)=-4ac$ である．

よって，② がすべての実数 b に対して成り立つ条件は

$$-4ac>0$$

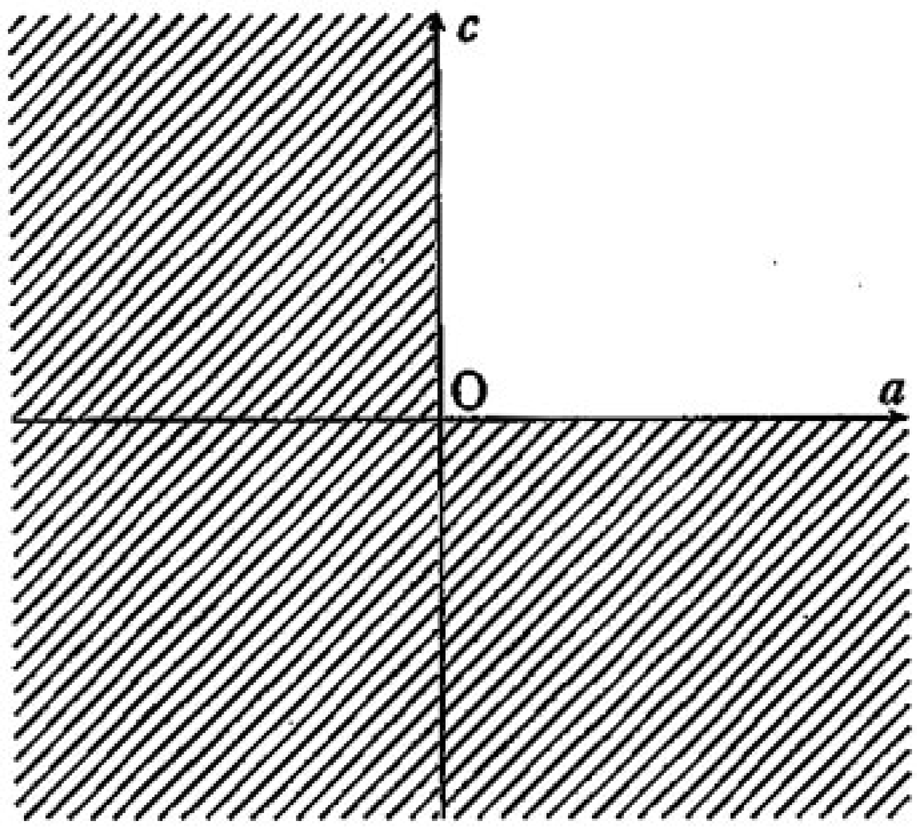
$a>0$ より，この条件は $c<0$ となるから，求める必要十分条件は「$a>0$ かつ $c<0$」

以上より，求める必要十分条件は「(i) または (ii) または (iii)」つまり

$$a<0 \text{ または「} a\geqq 0 \text{ かつ } c<0 \text{」} \quad \cdots\cdots (\text{答})$$

この $(a,\ c)$ の範囲を図示すると次図の斜線部となる．

ただし，境界線を含まない．



4

事象A：さいころを1回投げて4以下の目が出る．

事象B：さいころを1回投げて5以上の目が出る．

とする．

どこではじめてBが起こるかで場合分けすると，与条件を満たすのは

$$(*)\ \underbrace{AA\cdots\cdots A}_{k\text{個}}\underbrace{BB\cdots\cdots B}_{l\text{個}}\underbrace{AA\cdots\cdots A}_{n-k-l\text{個}}$$

$$0 \leqq k,\ 1 \leqq l,\ 0 \leqq n-k-l \cdots\cdots ①$$

となる場合に限る．

(＊)が起こる確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^l\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k-l}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-l}\left(\frac{1}{3}\right)^l=\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^l \cdots\cdots ②$$

であり，求める確率 p_n は ① をみたすすべての $(k,\ l)$ についての ② の総和である．

k を固定して l を動かしたとき，① より

$$1 \leqq l \leqq n-k$$

だから，このとき(＊)が起こる確率は

$$\sum_{l=1}^{n-k}\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^l=\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\sum_{l=1}^{n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^l$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right\}$$

$$=\left(\frac{2}{3}\right)^n\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right\}$$

さらに $0 \leqq k,\ 1 \leqq n-k$ より

$$k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1$$

だから求める確率 p_n は

$$p_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n 2^k$$

$$=n\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\frac{1-2^n}{1-2}$$

$$=n\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n(2^n-1)$$

$$=\frac{(n-1)2^n+1}{3^n} \cdots\cdots(\text{答})$$

5

四角錘 $AB_1B_2B_3B_4$ を T，正方形 $B_1B_2B_3B_4$ を S と呼ぶ．

与えられた球面の中心を O，S の対角線の交点を I とする．S を含む平面に A から下ろした垂線の足を H とし，$x = \mathrm{AH}$ とおく．

S を底面とみたとき T の体積が最大になるのは，A, O, I がこの順に一直線上に並ぶときである．このとき H = I だから $1 \leqq x < 2$，$\mathrm{OH} = x - 1$ である．$\triangle \mathrm{OB_1H}$ にピタゴラスの定理を用いると，

$$\mathrm{B_1H} = \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{2x - x^2}$$

したがって S の面積は，

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2x-x^2})^2 \cdot 4 = 2(2x - x^2)$$

ゆえに T の体積 V は，

$$V = \frac{1}{3} \cdot x \cdot 2(2x - x^2) = \frac{2}{3}(2x^2 - x^3)$$

この式の右辺を $f(x)$ とおく．

$$f'(x) = \frac{2}{3}(4x - 3x^2) = -2x\left(x - \frac{4}{3}\right)$$

x	1	$\cdots$	4/3	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	64/81	↘	

増減表より $x = \dfrac{4}{3}$ のとき $f(t)$ は最大になるから，V の最大値は，

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{64}{81}$$

…………(答)