2019年度 東北大学 前期 数学 (文系)

$\boxed{1}$ 直線 $y=ax$ と放物線 $y=x^2+a$ が相異なる 2 点 $\mathrm{P}(b,\ ab)$，$\mathrm{Q}(c,\ ac)$ で交わるとは

$$ax=x^2+a \qquad \therefore \quad x^2-ax+a=0$$

が異なる 2 実数解 b と c をもつことである．

解と係数の関係から

$$b+c=a \cdots\cdots ① \quad \text{かつ} \quad bc=a$$

この 2 式から $b+c=bc$ であり，これと $c=b^2$ から

$$b+b^2=b^3 \iff b(b^2-b-1)=0 \qquad \therefore \quad b=0,\ \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$b<0$ なので $b=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ であり，このとき $c=b^2=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ であるから，b，c は確かに実数である．

よって，① より

$$a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=2-\sqrt{5}$$

以上まとめると

$$a=2-\sqrt{5},\quad b=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$\boxed{2}$ (1) $\log_a(x-n) > \dfrac{1}{2}\log_a(2n-x)$

真数条件から $x-n>0$ かつ $2n-x>0$ より $n<x<2n$ …… ①

① のもとで，与式は

$$\log_a(x-n)^2 > \log_a(2n-x) \qquad \cdots\cdots ②$$

と変形できる．

ゆえに，$n=6$ のとき ①，② から

$$\begin{cases} 6<x<12 & \cdots\cdots ③ \\ \log_a(x-6)^2 > \log_a(12-x) & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

(i) $0<a<1$ のとき

④ は

$$(x-6)^2 < 12-x \iff x^2-11x+24<0 \iff (x-3)(x-8)<0$$

より $3<x<8$ であり，③ と合わせると，③ と ④ を満たす整数 x は $x=7$

(ii) $a>1$ のとき

④ は

$$(x-6)^2 > 12-x \iff x^2-11x+24>0 \iff (x-3)(x-8)>0$$

より $x<3$，$x>8$ であり，③ と合わせると，③ と ④ を満たす整数 x は $x=9$，10，11

以上まとめると，求める整数 x の値は

$0<a<1$ のとき $x=7$，$a>1$ のとき $x=9, 10, 11$ ……(答)

(2) (i) $0<a<1$ のとき

② は

$$(x-n)^2 < 2n-x \iff x^2-(2n-1)x+n^2-2n<0$$

$f(x)=x^2-(2n-1)x+n^2-2n$ とおくと，n は正の整数なので

$$f(n)=-n<0,\quad f(2n)=n^2>0$$

ゆえに，① かつ $f(x)<0$ を満たす整数解をもつ条件は

$$f(n+1)<0 \iff -n+2<0 \iff n>2$$

であり，n は正の整数であることも合わせると $n \geqq 3$

(ii) $a>1$ のとき

② は

$$(x-n)^2 > 2n-x \iff x^2-(2n-1)x+n^2-2n>0$$

(i) と同様に考えると，① かつ $f(x)>0$ を満たす整数解をもつ条件は

$$f(2n-1)>0 \iff n(n-2)>0 \iff n<0,\ n>2$$

であり，n は正の整数であることも合わせると $n \geqq 3$

以上まとめると，求める n についての必要十分条件は

$n \geqq 3$ ……(答)

である．

$\boxed{3}$ $\quad a_1=1,\quad a_2=3,\quad a_{n+2}a_n=2{a_{n+1}}^2\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(1) すべての正の整数 n について，「a_n は正である …… $(*)$」ことを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1,\ 2$ のとき

$a_1=1,\ a_2=3$ より $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k,\ k+1$ での成立を仮定すると

$$a_{k+2}=\frac{2{a_{k+1}}^2}{a_k}>0$$

であり，$n=k+2$ のときも $(*)$ は成り立つ．

以上 (i)，(ii) より，すべての正の整数 n について，$(*)$ は成り立つ． ……(証明終わり)

(2) (1) より，a_n，a_{n+1}，a_{n+2} は正より，与えられた式に対し底 2 の対数をとると

$$\log_2 a_{n+2}+\log_2 a_n=1+2\log_2 a_{n+1}$$
$$\log_2 a_{n+2}-\log_2 a_{n+1}=\log_2 a_{n+1}-\log_2 a_n+1$$

$\{\log_2 a_{n+1}-\log_2 a_n\}$ は公差が 1 の等差数列であり

$$\begin{aligned}\log_2 a_{n+1}-\log_2 a_n&=\log_2 a_2-\log_2 a_1+(n-1)\cdot 1\\&=\log_2 3+n-1\end{aligned}$$

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\log_2 a_n&=\log_2 a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(\log_2 3+k-1)\\&=\log_2 1+(n-1)\log_2 3+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\\&=\log_2 3^{n-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\log_2 2\end{aligned}$$

$$\therefore\quad a_n=3^{n-1}\cdot 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ．

以上より，$\quad a_n=3^{n-1}\cdot 2^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}\quad (n\geqq 1)$ ……(答)

$\boxed{4}$

(1) n 枚の硬貨の裏表の出方は 2^n 通りあり，これらは同様に確からしい.

1 回後に残る金貨 j 枚を決めると n 枚の硬貨の裏表の出方は 1 通りに決まるから

$$P_1(j) = \frac{{}_n\mathrm{C}_j}{2^n} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である.

(2) k 回後に残っている j 枚の金貨の選び方は ${}_n\mathrm{C}_j$ 通りあり，この j 枚が k 回後も金貨である確率は $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}^j = \left(\frac{1}{2}\right)^{kj}$ である.

他の $n-j$ 枚の金貨は 1 回目から k 回目のいずれかで裏が出る．裏が出て銀貨となった後は金貨の枚数に関係しないから，1 回目から k 回目までのうちの少なくとも 1 回裏が出る確率といえる．この $n-j$ 枚についての確率は

$$\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}^{n-j}$$

である．よって

$$P_k(j) = {}_n\mathrm{C}_j\left(\frac{1}{2}\right)^{kj}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}^{n-j} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $n=3$, $k=2$ のとき，(2) の確率は

$$P_2(j) = {}_3\mathrm{C}_j\left(\frac{1}{4}\right)^j\left(\frac{3}{4}\right)^{3-j}$$

3 枚の金貨があるとき次の試行で金貨が 0 枚になる確率は $\quad \frac{{}_3\mathrm{C}_0}{2^3} = \frac{1}{8}$

2 枚の金貨があるとき次の試行で金貨が 0 枚になる確率は $\quad \frac{{}_2\mathrm{C}_0}{2^2} = \frac{1}{4}$

1 枚の金貨があるとき次の試行で金貨が 0 枚になる確率は $\quad \frac{{}_1\mathrm{C}_0}{2} = \frac{1}{2}$

よって，求める確率は

$$\begin{aligned}&P_2(3)\cdot\frac{1}{8} + P_2(2)\cdot\frac{1}{4} + P_2(1)\cdot\frac{1}{2}\\ =&\frac{1}{4^3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{9}{4^3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{27}{4^3}\cdot\frac{1}{2}\\ =&\frac{127}{512}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$